



ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES

EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES à HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

E. H. VON BAUMHAUER

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLOBORATION DE

MM. **D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster, C. H. D. Buijs Ballot** et **C. K. Hoffmann.**

TOME XIX.

HAARLEM,
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1884.

TABLE DES MATIÈRES.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

QUELLE EST L'INFLUENCE DE LA RESPIRATION ABDOMINALE SUR LA PRESSION SANGUINE ARTÉRIELLE?

PAR

S. DE JAGER.

L'ampliation de la cavité thoracique, pendant la respiration, résulte de la contraction du diaphragme et de la contraction des muscles qui soulèvent les côtes. Dans l'inspiration ordinaire, les deux facteurs prennent part à cette ampliation, mais pas toujours au même degré; or, suivant que l'un ou l'autre devient prépondérant, on parle de type respiratoire abdominal ou costal.

Bien qu'ils soient jusqu'à un certain point sous la dépendance de la volonté, le type costal se rencontre habituellement chez la femme, le type abdominal chez l'homme, et quant aux animaux qui servent le plus souvent aux recherches, le chien et le chat ont une respiration où domine le mode costal, le lapin une respiration presque purement abdominale.

Que la dilatation de la cavité thoracique s'opère suivant le type costal ou suivant le type abdominal, dans les deux cas elle est suivie de l'épanouissement des poumons, de l'accroissement de la pression négative (aspiration) qui règne sur les viscères thoraciques. Mais la contraction du diaphragme n'aura

pas seulement pour effet d'agrandir la cavité thoracique, elle rendra en même temps la cavité abdominale plus petite; en conséquence, à chaque inspiration, la pression sur les viscères abdominaux augmentera par suite de la contraction du diaphragme, à chaque expiration elle diminuera de nouveau.

Comme il existe dans la cavité abdominale différents vaisseaux sanguins d'un volume plus ou moins considérable, tant artères que veines, et en outre un très grand nombre de capillaires, ces vaisseaux devront éprouver aussi le changement alternatif de pression pendant la respiration. Quelle influence cela exerce-t-il sur la circulation? Cette influence, évidemment, doit être de nature périodique.

Dans son célèbre Mémoire sur le mécanisme de la respiration et de la circulation, [1]) M. Donders nous a appris comment la pression négative intra-thoracique influe, par son augmentation et sa diminution, sur l'afflux du sang veineux vers le thorax. Chaque inspiration favorise cet afflux, parce que, durant l'acte inspiratoire, l'aspiration augmente dans la cavité du thorax, de sorte que les grosses veines y subissent une dilatation et que, par suite, le sang est attiré des parties périphériques vers le thorax; mais en outre, lors de l'inspiration, la pression croît dans la cavité abdominale, d'où il résulte que les veines y éprouvent un rétrécissement et que le sang est poussé de l'abdomen vers le thorax. Ainsi, chacun des deux facteurs, diminution de la pression dans le thorax, augmentation de la pression dans la cavité abdominale, favorise le mouvement du sang dans les grosses veines qui le portent au cœur. M. Donders fait remarquer l'importance de ces conditions pour la circulation sanguine dans le système de la veine porte.

L'influence que les alternatives de la pression intra-abdominale excercent sur la circulation veineuse s'explique seulement par

---

[1]) Donders, *Beiträge zum Mechanismus der Respiration und Circulation im gesunden und kranken Zustande*, dans: *Zeitschr. f. rat. Med.*, t.III, p.287.

la faiblesse de la pression sanguine dans les veines et par la circonstance que la paroi de ces vaisseaux est mince et ne possède qu'un faible coefficient d'élasticité. De petites variations dans la pression extérieure à laquelle cette paroi est soumise devront donc influer déjà sur le calibre des veines. Il en est tout autrement des artères. A priori, nous pouvons dire que l'influence des mêmes variations de pression extérieure sur ces vaisseaux, dans lesquels règne une pression sanguine élevée et qui ont une paroi beaucoup plus épaisse et un coefficient d'élasticité plus fort, *doit* être beaucoup moindre.

Si le calibre des artères, c'est-à-dire ici de l'aorte abdominale et de ses ramifications, se ressent effectivement des changements alternatifs de la pression intra-abdominale, il doit en résulter des variations périodiques dans la circulation sanguine locale, lesquelles réagiront alors sur les autres parties du système aortique: en d'autres termes, des variations de la pression ou de la vitesse du sang doivent se manifester dans le système aortique, synchroniquement avec les contractions du diaphragme.

M. Marey [1]) croit devoir admettre une pareille action directe sur la circulation artérielle. Parlant de l'influence que les mouvements respiratoires excercent „sur la ligne d'ensemble du tracé du pouls", c'est-à-dire, suivant M. Marey, sur la pression moyenne du sang artériel, il regarde le changement que le tracé (pression sanguine moyenne) subit comme dépendant de la manière dont s'effectue la respiration. Lorsqu'on respire par l'une des narines (l'autre narine et la bouche étant fermées), auquel cas l'air pénètre difficilement dans les voies respiratoires et en est aussi difficilement expulsé, le tracé s'abaisse pendant l'inspiration, s'élève pendant l'expiration. Respire-t-on, au contraire, à bouche largement ouverte, de façon que l'air puisse entrer et sortir facilement, alors le tracé monte pendant l'inspiration et descend pendant l'expiration. Ces deux modes

1) Marey, *Physiologie médicale de la circulation du sang*, Paris, 1863, p. 287.

de respiration occasionnent donc des changements tout à fait opposés dans la pression sanguine artérielle. M. Marey explique ce phénomène par l'état de l'aorte thoracique et de l'aorte abdominale durant la respiration. Dans le premier cas, l'aspiration intra-thoracique augmentera notablement lors de l'inspiration, parce que l'air ne peut pas s'introduire avec une rapidité suffisante par une seule narine; l'aorte thoracique sera donc dilatée, et par suite il y aura abaissement de pression dans les ramifications de l'aorte. Lors de l'expiration, ce sera l'inverse. Dans le second cas, où l'air arrive très facilement aux poumons, l'aspiration intra-thoracique sera beaucoup moins accrue que dans le premier cas, et l'aorte thoracique sera donc beaucoup moins dilatée; mais comme, lors de l'inspiration, la contraction du diaphagme donne lieu à une augmentation de pression dans la cavité abdominale, l'aorte abdominale sera comprimée à ce moment et la pression s'élèvera donc dans la partie de l'aorte qui est située plus en avant, ainsi que dans les ramifications de cette partie, par exemple, dans l'artère radiale. Ce second effet se manifestera bien aussi dans la respiration par une seule narine, mais il aura alors beaucoup moins d'influence que dans la respiration libre. Ainsi, les deux changements qui se produisent, dans le thorax et dans l'abdomen, réagissent en sens opposé sur la pression dans l'artère radiale, et M. Marey pense que, en cas de respiration parfaitement normale, ils pourraient neutraliser réciproquement leur influence, en d'autres termes, que la pression dans l'artère radiale n'en éprouverait aucune variation.

Dans son nouvel ouvrage, *La circulation du sang*, 1881 [1]), M. Marey demeure fidèle à cette opinion et croit aussi avoir démontré par une expérience faite sur un animal l'influence de la respiration abdominale sur la pression sanguine artérielle. Un manomètre inscripteur étant relié à l'artère fémorale d'un lapin,

---

[1]) Marey, *La circulation du sang à l'état physiologique et dans les maladies*, Paris 1881, p.454.

et la courbe des mouvements respiratoires étant inscrite simultanément, M. Marey voit, lorsque l'animal est couché sur le ventre, la pression sanguine s'abaisser pendant l'inspiration et s'élever pendant l'expiration; couche-t-on ensuite l'animal sur le dos, ce qui donne lieu a une respiration fortement abdominale, la pression sanguine artérielle subit des changements inverses aux précédents, elle s'élève lors de l'inspiration et s'abaisse lors de l'expiration.

M. v. Basch paraît également attribuer à la pression intra-abdominale une certaine influence sur la pression du sang [1]). Il croit aussi que, en cas d'accroissement de la pression intra-abdominale, le sang sera refoulé des organes abdominaux dans la veine cave et que l'afflux du sang veineux au cœur sera donc favorisé; mais en même temps, par cet accroissement de pression, le domaine capillaire de la région abdominale sera rétréci et le sang venant du tronc de l'aorte éprouvera une résistance plus grande; il se produira donc un état qui, en ce qui concerne l'effet sur la pression dans la carotide, équivaudra à une excitation des nerfs splanchniques.

En énumérant les divers facteurs qui par leur concours donneraient lieu aux oscillations respiratoires de la pression sanguine, M. Zuntz [2]) nomme, entre autres, la pression que les muscles exercent sur le contenu de la cavité abdominale, pression tendant à entraver l'écoulement du sang de l'aorte, à favoriser le transport du sang, par la veine cave inférieure, vers le cœur. De cette manière, suivant M. Zuntz, l'abaissement du diaphragme, lors de l'inspiration, peut déjà augmenter la pression sanguine, et une expiration active produira cet effet dans une mesure encore beaucoup plus forte.

---

1) v. Basch, *Dié volumetrische Bestimmung des Blutdrucks am Menschen*, dans *Medicin. Jahrb.*, 1876, p. 431.

2) N. Zuntz, *Beiträge zur Kenntniss der Einwirkungen der Athmung auf den Kreislauf*, dans *Archiv f. d. ges. Phys.*, t. XVII, p. 374.

Déjà en 1875, M. Kuhn [1]) avait montré, par la voie expérimentale, que des variations de pression dans l'abdomen peuvent déterminer des oscillations synchrones de la pression sanguine artérielle. Chez des chiens, dont les nerfs vago-sympathiques étaient sectionnés, dont le thorax était ouvert, mais dont la cavité abdominale était encore fermée, M. Kuhn a vu se produire des oscillations de la pression sanguine, lesquelles étaient régulières, mais duraient plus longtemps que les insufflations d'air par le soufflet. Ces oscillations plus longues étaient toutefois parfaitement isochrones avec des mouvements pseudo-respiratoires, de telle sorte que, lors de la pseudo-inspiration, la pression sanguine s'élevait. Lorsque les insufflations étaient suspendues, les oscillations dont les périodes correspondaient à ces insufflations disparaissaient complètement; celles de durée plus longue persistaient au contraire, et prenaient un peu plus d'amplitude. Chez des chiens placés dans les mêmes conditions, sauf qu'ils avaient été curarisés et que par conséquent les mouvements pseudo-respiratoires ne se produisaient pas, on n'observait jamais ces oscillations de la pression sanguine. M. Kuhn pense que le rétrécissement et la dilatation alternatifs de la cavité abdominale (par la contraction du diaphragme) sont ici la condition *sine qua non* de la production de ces oscillations, et que celles-ci s'expliqueraient simplement par l'augmentation et la diminution alternatives de l'afflux du sang au cœur droit.

M. Luciani [2]) aussi aurait constaté expérimentalement l'influence de la contraction du diaphagme sur la pression du sang: il aurait vu que cette pression ne s'élève plus pendant l'inspiration, lorsque les nerfs phréniques ont été coupés.

M. Schweinburg a publié, en 1881, un Mémoire [3]) dans

---

[1]) C. H. Kuhn, *Over de respiratie-schommelingen der slagaderlijke bloedsdrukking*, Amsterdam, 1875.

[2]) Cité d'après Schweinburg, *Archiv* v. du Bois-Reymond, 1881, p. 479.

[3]) L. Schweinburg, *Die Bedeutung der Zwerchfellcontraction für die respiratorischen Blutdruckschwankungen*, dans *Archiv f. Physiol. v.* du Bois-Reymond, 1881, p. 475.

lequel il annonce avoir reconnu, par l'étude des oscillations respiratoires de la pression sanguine chez l'homme, que celles-ci suivaient les mêmes lois que chez les animaux; il y avait toutefois aussi des différences, qui ne se laissaient pas expliquer par les théories alors connues. En outre, ses expériences rendaient très probable, suivant lui, que les variations de la pression intra-abdominale exerçaient une grande influence sur les oscillations respiratoires de la pression du sang chez l'homme. Il chercha alors à prouver qu'il en est de même chez les animaux. Il enregistrait la pression sanguine dans l'artère carotide, en même temps que les mouvements respiratoires du thorax, chez un chien narcotisé et ayant les nerfs vago-sympathiques coupés, après quoi il sectionnait les nerfs phréniques, de sorte que le diaphragme était paralysé et que la respiration ne se faisait donc plus que par le mouvement des côtes. Après avoir décrit les courbes de 3 de ces expériences, M. Schweinburg dit: „de pareils tracés montrent que lorsque le diaphragme est paralysé, les oscillations respiratoires de la pression du sang disparaissent entièrement ou presque entièrement, d'où l'on peut conclure avec certitude, semble-t-il, que l'action du diaphragme contribue tout au moins pour une très forte part à la production de ces oscillations". Or, après la paralysie du diaphragme, la pression intra-abdominale n'éprouverait presque plus aucun changement pendant la respiration. L'épanouissement des poumons se fait alors uniquement par le soulèvement des côtes. Comme en outre, suivant M. Schweinburg, les oscillations de la pression sanguine deviennent notablement plus petites lorsque, sans couper les nerfs phréniques, on ouvre la cavité abdominale du chien, il conclut que la suppression des oscillations respiratoires de la pression sanguine après la section des nerfs phréniques doit avoir sa cause dans les changements survenus, à la suite de cette opération, dans la cavité abdominale. L'accroissement normal de la pression artérielle pendant l'inspiration disparaîtra, après la section des nerfs phréniques, parce que le mouvement du sang de la veine cave inférieure vers le cœur n'est alors plus favorisé

par une augmentation inspiratoire de la pression intra-abdominale, et, plus encore, parce que le sang peut alors couler librement, sans qu'une pareille augmentation vienne entraver son cours, de l'aorte dans les vaisseaux sanguins des viscères abdominaux. Dans les circonstances normales, au contraire, la contraction du diaphragme (lors de l'inspiration) accroîtra la pression intra-abdominale; par suite, les vaisseaux sanguins de la cavité de l'abdomen seront comprimés, l'écoulement du sang dans ces vaisseaux sera gêné, et une plus grande quantité de sang sera donc refoulée dans les autres ramifications de l'aorte, situées en dehors de la cavité abdominale. „Que dans cette dernière action", dit M. Schweinburg, „doit être cherchée la cause principale de la surélévation de la pression sanguine, et non dans la première, qui tend directement à remplir le cœur, c'est ce qui paraît complètement démontré par mes expériences". L'abaissement de la pression sanguine, lors de l'expiration, tient alors à ce que par le relâchement du diaphragme se trouve supprimée l'augmentation de la pression intra-abdominale, et à ce que par suite les vaisseaux intra-abdominaux redeviennent plus larges, d'où il résulte que le sang peut de nouveau s'écouler librement de l'aorte thoracique.

La seconde partie du Mémoire de M. Schweinburg est consacrée aux oscillations respiratoires de la pression sanguine chez l'homme. Je ne dirai rien de cette partie, mon intention, dans le présent travail, étant de ne traiter la question de la respiration intra-abdominale qu'au point de vue des expériences sur les animaux. Il me semble en effet, vu la complexité d'action qu'on rencontre dans ce phénomène, que les différents facteurs qui y interviennent doivent d'abord être déterminés par des expériences exactes, conduisant à des résultats concordants, avant qu'on puisse se former une opinion sur la cause des particularités que nous observons à cet égard chez l'homme. Or, des expériences exactes ont assurément été exécutées sur cette question par des expérimentateurs habiles, mais, en beaucoup de points, l'accord fait encore défaut.

Dans un travail postérieur [1]), M. Schweinburg a cherché à confirmer par une autre expérience les conclusions de son premier Mémoire. En enregistrant la pression du sang dans la carotide, les nerfs vagues étant coupés, il a vu disparaître les oscillations respiratoires de la pression sanguine lorsqu'il comprimait l'aorte thoracique. A cet effet, il préparait ce vaisseau, près de la colonne vertébrale, en reséquant une portion de l'avant-dernière côte, sans léser la plèvre; l'aorte pouvait alors être comprimée, pendant que la respiration se faisait comme à l'ordinaire.

Après ce court aperçu historique, je m'arrêterai encore un instant à quelques considérations générales sur les oscillations respiratoires de la pression sanguine artérielle. Dans mon dernier Mémoire concernant cette question [2]), j'ai essayé de montrer, avec toute la clarté possible, que ces oscillations *doivent* avoir leur cause fondamentale dans les changements que la circulation pulmonaire subit pendant la respiration. La courbe de la pression du sang artériel naît, en effet, de la combinaison de la courbe de la capacité et de la courbe de la vitesse de circulation: elle est, en quelque sorte, la résultante de celles-ci, De cette manière, en s'appuyant sur les résultats d'expériencces exécutées sur l'animal vivant, dans des circonstances diverses, on pouvait expliquer complètement les différentes variations qui s'observent dans ces oscillations de la pression artérielle. Déjà alors, je faisais remarquer que peut-être la courbe de la pression sanguine pouvait être modifiée par des influences nerveuses, par des changements dans la fréquence des battements du cœur ou dans la pression périphérique; mais la cause essentielle de ses oscillations devait toujours être cherchée dans la circulation pulmonaire. Cette opinion je crus pouvoir l'exprimer sans courir le risque d'être accusé d'idées préconçues.

---

1) L. Schweinburg, *Weiteres über die Entstehung der respiratorischen Blutdruckschwankungen* dans *Archiv f. Physiol.* v. du Bois-Reymond, 1882, p.540.

2) S. de Jager, *Die Lungencirculation und der arterielle Blutdruck*, dans: *Archiv f. d. ges. Physiol.*, t. XXVII, p. 152.

Les belles recherches de M. Kuhn venaient tout particulièrement à mon appui. Bien que M. Kuhn, ainsi qu'il ressort nettement de son travail, ne fût point parti du principe que la circulation pulmonaire déterminerait les oscillations respiratoires de la pression sanguine (les recherches de MM. Funke et Latschenberger n'étaient pas encore connues), il était arrivé à ce résultat [1]), „que le volume des poumons a une influence décisive sur la hauteur de la pression sanguine", et il avait finalement conclu: „que dans l'épanouissement et l'affaissement des poumons il se produit des actions mécaniques qui influencent directement la poussée du sang dans le système artériel".

Après cette conclusion, obtenue d'une manière tout à fait impartiale, des séries de recherches furent exécutées sur la circulation pulmonaire elle-même. J'y contribuai pour ma part [2]) et, dans un Mémoire postérieur, j'appliquai les résultats de ce travail à la pression artérielle. Je trouvai ainsi que la présomption de M. Kuhn, ci-dessus énoncée, était parfaitement exacte, et lorsque ensuite j'eus appris à mieux connaître, d'abord la nature même de ces actions mécaniques qui interviennent dans l'épanouissement et l'affaissement des poumons, puis la manière dont elles influent sur la pression sanguine artérielle, je me crus autorisé à y voir la source principale des oscillations de cette pression.

Les nouvelles expériences, dont je vais rendre compte, n'ont fait que me confirmer dans cette opinion. Mais il ne s'ensuit pas que la cause indiquée doive être la seule. J'ai écarté, comme il a été dit ci-dessus, la question de savoir si la courbe de la pression sanguine est encore influencée par d'autres facteurs. C'est ainsi que les changements de l'activité cardiaque pendant la respiration, dus aux influences nerveuses, se répercutent indubitablement sur les oscillations artérielles. On n'a qu'à comparer les tracés de la pression sanguine obtenus dans les

---

1) *l.c.*, p. 115 et 127.

2) S. de Jager, *Ueber den Blutstrom in den Lungen*, dans: *Archiv f. d. ges. Physiol.*, t. XX, p. 426.

circonstances ordinaires et après la section des nerfs vago-sympathiques, pour reconnaître immédiatement la différence de forme; mais, en même temps, il ressort de cette comparaison que lorsque, par suite de cette section, les variations de l'activité du cœur sont exclues, les oscillations respiratoires persistent, et que leur relation avec les phases de la respiration devient même beaucoup plus distincte.

Reste-t-il, après la section des nerfs vago-sympathiques, encore d'autres facteurs accessoires? M. Talma, dans le Mémoire qu'il a publié dernièrement à ce sujet [1]), attribue beaucoup d'importance aux variations de la pression sur la face externe du cœur pendant la respiration. Bien que je ne veuille nullement contester cette influence, il faut pourtant reconnaître que, si réellement elle était prédominante, une grande différence devrait se manifester dans la forme des oscillations respiratoires, suivant que la respiration artificielle (par le soufflet) est effectuée à thorax fermé ou à thorax ouvert; dans le premier cas, en effet, la face externe du cœur éprouvera chaque fois le surcroît de pression occasionné par l'insufflation, dans le second cas, elle n'en ressentira rien. Or, du Mémoire de M. Kuhn je crois pouvoir inférer que, dans ce second cas, la forme des oscillations respiratoires ne subit aucun changement bien appréciable; du reste, M. Talma lui-même voit des oscillations respiratoires se produire dans ce cas (p. 327), et *alors* il les attribue, lui aussi, à des variations de la résistance dans les vaisseaux pulmonaires. Pourquoi de semblables variations de résistance n'apparaîtraient pas lorsque le thorax reste fermé, c'est ce qu'il n'est pas aisé de comprendre. Mais, encore une fois, je n'entends pas nier l'influence des changements de la pression supportée par le cœur. En ce qui concerne toutefois l'influence de la circulation pulmonaire elle-même, qu'il me soit permis de soumettre à M. Talma une couple d'observations.

---

1) Talma, *Beiträge zur Kenntniss des Einflusses der Respiration auf die Circulation des Blutes*, dans: *Archiv f. d. Physiol.*, t. XXIX, p. 311.

„Lorsque", dit-il, „la quantité de sang que le ventricule droit reçoit pendant la diastole reste la même, et que la fréquence des contractions demeure également constante, la quantité de sang qui traverse les poumons ne peut augmenter, si faibles que puissent devenir les résistances". Cela, toutefois, n'est pas un argument contre l'influence de la circulation pulmonaire. Admettons, pour un instant, que la quantité de sang amenée au cœur par les veines caves reste parfaitement constante, ainsi que la fréquence des pulsations cardiaques; il faut alors, pour que le sang ne s'accumule nulle part, que dans des intervalles de temps égaux, comprenant quelques respirations (en 5 minutes, par exemple), une même quantité de sang soit poussée chaque fois dans le tronc aortique. La pression moyenne dans l'aorte peut alors être représentée par une ligne droite horizontale. Mais, avant que le sang ne parvienne du cœur droit au cœur gauche, il doit traverser tout un système vasculaire, dont le calibre intérieur varie avec les différentes phases de la respiration. Naturellement, cette variation réagira périodiquement sur la quantité de sang qui coule des veines pulmonaires vers le cœur gauche, et ainsi apparaîtront, malgré la constance parfaite de l'apport au cœur droit, des oscillations périodiques dans la quantité de sang que reçoit le cœur gauche; par suite, on observera aussi des oscillations périodiques de la pression du sang dans les artères, bien que, là encore, la pression sanguine moyenne soit représentée par la ligne droite ci-dessus mentionnée. Il ne s'agit donc pas, pour le moment, de savoir si le cœur droit reçoit plus ou moins de sang (nous examinerons tantôt de quelle manière cela influe sur la pression artérielle), mais si la quantité de sang reçue par le cœur gauche varie périodiquement.

Mes expériences sur la circulation artificielle chez l'animal récemment tué ont démontré que, malgré la constance de l'apport dans l'artère pulmonaire, des courbes de capacité et de vitesse de circulation s'accusent dans la pression de la carotide, et, ainsi que je le faisais remarquer, dans ces expériences la carotide

pouvait être regardée comme un simple prolongement, en dehors du thorax, des veines pulmonaires [1]). Ce qu'on observait dans la courbe carotidienne, combiné avec la quantité de sang qui s'écoulait de l'aorte abdominale, permettait de tirer une conclusion au sujet des changements éventuels de cette circulation dans les veines pulmonaires lors des variations périodiques du volume des poumons. Or, il ressortait de ces expériences, que la quantité de sang qui se rend au cœur gauche, l'apport à l'artère pulmonaire étant constant, variait suivant que les poumons étaient épanouis ou affaissés.

Bien que je n'osasse affirmer que les variations de la circulation pulmonaire soient les mêmes lors de l'inspiration normale, qui détermine l'épanouissement des poumons, et lors de l'aspiration artificielle intra-pulmonaire (comme dans les expériences de M. Talma), laquelle, au lieu de l'épanouissement des poumons, doit provoquer leur affaissement, je veux pour un instant admettre cette identité et considérer la courbe de M. Talma (fig. 2) comme née d'une inspiration normale avec suspension subséquente. La forme de cette courbe montre alors clairement, ce me semble, la périodicité des variations de la circulation pulmonaire. On y voit, près de la suspension de l'inspiration, une lente ascension, mais, au bout de quelque temps, cette ascension fait de nouveau place à un abaissement. Plus loin, fig. 8, M. Talma a représenté une inspiration réelle, les nerfs vago-sympathiques étant coupés; là aussi, il voit lors de l'inspiration profonde une lente ascension, qui vers la fin est suivie d'abaissement. „Il ressort directement de la figure, „dit-il", qu'on aurait tort de vouloir expliquer toutes les variations de la pression dans les artères par les variations du calibre des vaisseaux pulmonaires" [1]). Si l'on continue de supposer que l'apport au cœur droit devient constant, ce qui d'ailleurs, *cœteris paribus*, doit arriver au moment de la suspension inspiratoire où à la fin d'une inspiration très profonde et lente, la courbe de la

[1]) *L.c.*, p.160.
[2]) *L.c.*, p.331.

vitesse de circulation (élévation de la pression sanguine) apparaîtra bien dûment après l'achèvement de la variation initiale, mais dès qu'un nouvel état d'équilibre s'est établi dans la circulation pulmonaire elle-même, l'influence de la courbe de la vitesse de circulation doit naturellement s'évanouir et la pression du sang dans l'aorte (ou dans la carotide) doit retomber à sa hauteur moyenne.

Lorsqu'on a fait beaucoup de déterminations de la pression sanguine, dans des conditions de circulation artificielle, de circulation normale, de respiration normale, de respiration artificielle par un soufflet, de respiration artificielle par des mouvements imprimés au diaphragme, et que toujours on a vu la pression sanguine éprouver des oscillations, qui non-seulement apparaissent synchroniquement avec les mouvements pulmonaires, mais dont l'amplitude suit pas à pas l'étendue de ces mouvements; lorsque toujours on a constaté que les accidents de ces nombreuses courbes sont en accord avec ce qui devrait résulter de la circulation pulmonaire, on ne peut guère échapper à la conviction que les variations de cette circulation *doivent* être la cause fondamentale des oscillations de la pression.

La différence qui se manifeste dans la courbe de la pression sanguine, lorsqu'on substitue chez un chien la respiration nasale à la respiration trachéale, n'est pas un argument contre l'influence de la circulation pulmonaire. M. Gad [1]) a cru trouver dans cette expérience, si je le comprends bien, la preuve que la variation de la pression pleurale, pendant la respiration, influe sur les oscillations respiratoires de la pression sanguine artérielle, puisque le facteur indiqué par MM. Funke et Latschenberger [2]), l'influence de la variation de volume des poumons, reste le même quand la respiration nasale remplace la respiration trachéale, et que

[1]) J. Gad, *Ueber Athemschwankungen des Blutdruckes*, dans: *Archiv f. Physiol. v.* du Bois-Reymond, 1880, p. 287.

[2]) O. Funke u. J. Latschenberger, *Ueber die Ursachen der respiratorischen Blutdruckschwankungen im Aortensystem*, dans: *Archiv f. d. ges. Physiol.*, t. XV, p. 405, et t. XVII, p. 547.

néanmoins des changements apparaissent dans les oscillations.

Mais, lors de cette substition de la respiration nasale à la respiration trachéale, il est indubitable que la circulation pulmonaire ne reste *pas* la même. Si l'honneur d'avoir les premiers attiré l'attention sur ce facteur des oscillations artérielles revient à MM. Funke et Latschenberger, on ne saurait nier, comme je l'ai déjà fait remarquer antérieurement, qu'ils ne se soient trompés dans leurs conclusions au sujet de cette influence de la circulation pulmonaire. „Trois facteurs", disais-je [1]) „déterminent la capacité des poumons: 1° l'élargissement des vaisseaux pulmonaires par la pression du sang dans les vaisseaux afférents et efférents; 2° la pression de l'air sur les vaisseaux alvéolaires, pression qui tend à les comprimer et par conséquent à réduire leur capacité; 3° la distension, tant longitudinale que perpendiculaire à l'axe, que les vaisseaux pulmonaires subissent lors de la dilatation des poumons par l'aspiration". Or, si la respiration trachéale est changée en respiration nasale, 1° la variation de la pression de l'air sur les vaisseaux alvéolaires ne sera pas la même dans les deux cas; 2° la variation de la pression pleurale ne restera pas non plus la même, et cette dernière, à son tour, influera sur la dilatation des vaisseaux du poumon et par suite sur la différence de pression entre l'artère et les veines pulmonaires: raisons bien suffisantes pour que la circulation pulmonaire éprouve l'influence du changement dans le mode respiratoire.

Avant de rechercher si la pression dans l'abdomen a de l'influence sur la pression sanguine artérielle, nous devons encore considérer d'un peu plus près cette pression intra-abdominale. Je n'ai trouvé d'indications à cet égard que chez M. P. Bert [2]). Il introduisait un tube de verre dans l'intestin d'un chien, de telle sorte que l'ouverture de l'anus était bouchée par une petite

---

1) *L. c.*, p. 467.

2) P. Bert, *Leçons sur la physiologie comparée de la respiration*, Paris, 1870, p. 338.

poche de caoutchouc entourant le tube. Celui-ci était relié à un manomètre à eau, dont la branche ouverte communiquait, par transport d'air, avec un tambour enregistreur. Ainsi s'inscrivaient les variations de la pression intra-abdominale, en même temps qu'étaient inscrits les mouvements du thorax ou les variations de la pression intra-trachéale. M. Bert trouva que la pression intra-abdominale ne variait pas toujours dans le même sens par rapport aux mouvements respiratoires, mais qu'elle présentait en apparence beaucoup d'irrégularités, qui toutefois se laissaient précisément expliquer par la circonstance que la respiration n'avait pas toujours lieu de la même manière. Si le diaphragme se contracte pendant l'inspiration, la pression dans l'abdomen augmentera; l'inspiration est-elle, au contraire, produite exclusivement par la contraction des muscles thoraciques, la pression intra-abdominale devra décroître pendant l'inspiration. Il s'ensuit que, si les deux facteurs (diaphragme et muscles thoraciques) agissent conjointement mais à des degrés différents, la variation de la pression intra-abdominale peut être très différente d'un cas à l'autre. Pour démontrer expérimentalement cette conclusion, M. Bert voulut enregistrer la pression intra-abdominale chez le lapin — qui respire presque exclusivement à l'aide du diaphragme — après avoir sectionné la moelle cervicale; il coupa aussi, chez le chien, les nerfs phréniques, afin de supprimer la respiration diaphragmatique. Des circonstances accidentelles l'ont malheureusement empêché de donner à ces expériences leur pleine exécution.

Il y a naturellement un intérêt spécial à savoir comment la pression intra-abdominale varie pendant la respiration lorsque le diaphragme se comporte passivement, d'autant plus qu'il s'agit d'expliquer aussi les oscillations de la pression sanguine artérielle dans les cas de paralysie diaphragmatique. M. Rosenthal a déjà attiré l'attention sur ces mouvements passifs du diaphragme [1]). „Lorsque le diaphragme", dit-il, „est relâché ou

---

1) J. Rosenthal, *Die Athembewegungen und ihre Beziehungen zum Nervus Vagus*, Berlin, 1862, p. 49.

contracté, tandis que le thorax exécute encore des mouvements, ceux-ci doivent évidemment se communiquer au diaphragme, non seulement parce que le diaphragme est attaché au bord des côtes, mais aussi en vertu de l'élasticité des poumons. — Ces mouvements passifs se voient surtout très bien quand le diaphragme est relâché (particulièrement après la section des deux nerfs phréniques, ou après la section de l'un deux, au côté correspondant), et on peut déjà les distinguer des vraies contractions diaphragmatiques à ce que, dans leurs phases, il sont directement opposés aux mouvements respiratoires de la cage thoracique". Les mouvements du diaphragme, tant actifs que passifs, s'observeraient très nettement en appliquant la méthode que M. Snellen [1]) a employée jadis pour étudier l'influence du nerf vague sur les mouvements respiratoires, méthode qui consiste à enfoncer une aiguille perpendiculairement dans le ventre, immédiatement au-dessous du sternum; cette aiguille suit alors très exactement les mouvements du diaphragme. Je regrette beaucoup de n'avoir pas fait usage de cette méthode, concurremment avec l'autre, dans les expériences dont il me reste encore à rendre compte.

J'ai enregistré la pression intra-abdominale en même temps que les mouvements de la paroi thoracique et de la paroi abdominale. Chez un chien de 6 kilogrammes, narcotisé par la morphine et le chloroforme, un coussin d'air était appliqué sur les côtes, à droite du sternum, et un second sur la ligne blanche de l'abdomen, au milieu de l'espace entre le sternnm et la symphyse; en outre, un large cathéter, entièrement ouvert par devant, était introduit par l'anus dans l'intestin. Les deux coussins d'air et le cathéter communiquaient, chacun séparément, par transport d'air, avec un tambour enregistreur, de sorte que les mouvements de la paroi thoracique, ceux de la paroi abdominale et les variations

---

1) H. Snellen, *Onderzoekingen over den invloed van de n. vagus op de ademhalingsbewegingen*, dans: *Onderz. ged. in het Physiol. Laborat. d. Utrechtsche Hoogeschool*, t. VII, 1854–55, p. 121.

de la pression dans l'abdomen s'inscrivaient simultanément sur un cylindre tournant.

Tout d'abord on constata que la pression dans l'intestin n'éprouvait presque pas de changements pendant la respiration; les intestins étant peu remplis, la paroi abdominale était flasque, et un rapetissement de la cavité abdominale, par la contraction du diaphragme, ne pouvait donc guère modifier la pression. La preuve que ce résultat n'était pas dû à l'obstruction du cathéter par des matières intestinales, c'est que, en appliquant la main sur la paroi de l'abdomen et en faisant rentrer celle-ci, on voyait le levier du tambour accuser une surélévation notable.

Pour renforcer les variations de la pression intra-abdominale, j'augmentai la pression absolue dans la cavité de l'abdomen, en injectant de l'eau tiède dans les intestins, jusqu'à ce que la paroi abdominale montrât une certaine tension; le cathéter remis en place, l'occlusion de l'anus était suffisante pour maintenir cette tension. Le tube de caoutchouc qui reliait le cathéter au tambour était ensuite maintenu à une certaine hauteur par un support. L'eau s'élevait alors, dans la partie montante du tube, jusqu'à ce que la colonne liquide fît équilibre à la pression dans l'intestin. Les variations de cette pression, au cours de la respiration, étaient maintenant beaucoup plus considérables. A chaque inspiration, le levier du thorax s'élevait, et de même celui de l'abdomen; le mouvement du premier était toutefois plus étendu que celui du second, preuve de la prépondérance de la respiration costale dans ce cas. Les deux leviers ne s'élevaient pourtant pas toujours au même instant. Ordinairement, le mouvement du thorax se dessinait le premier, mais quelquefois aussi c'était celui de l'abdomen; dans ce dernier cas, la contraction du diaphragme commençait donc avant celle des muscles thoraciques, ce qui paraît dépendre de la volonté de l'animal. Quand les mouvements costaux et abdominaux se faisaient simultanément, ou que la paroi de l'abdomen se soulevait la première, je voyais la pression intra-abdominale monter directement lors de l'inspiration et redescendre lors de l'expiration.

Mais lorsque le mouvement de la paroi thoracique précédait celui de la paroi abdominale, en d'autres termes, lorque la contraction du diaphragme commençait un peu après celle des muscles du thorax, je voyais, lors de l'inspiration, la pression intra-abdominale s'abaisser d'abord un peu, pour ne s'élever qu'ensuite.

Après que les deux nerfs vago-sympathiques eurent été coupés, ce qui rend la respiration beaucoup moins fréquente, mais chaque inspiration plus profonde, les variations de la pression intra-abdominale étaient devenues beaucoup plus étendues.

Une pression vigoureuse sur la paroi abdominale, dans la pause entre deux respirations, fait fortement soulever le levier de l'intestin.

Chez un autre chien, du poids de 6¼ kilogrammes, il fut procédé de la même manière: après l'avoir narcotisé par la morphine et le chloroforme, on plaça des coussins d'air sur le thorax et sur la ligne blanche de l'abdomen, on introduisit le cathéter dans l'intestin et on relia les coussins et le cathéter à des tambours.

Le levier qui devait inscrire la pression intestinale éprouva de nouveau des oscillations presque insensibles; il ne s'élevait franchement que lorsqu'on comprimait l'abdomen avec la main. De l'eau fut donc de nouveau injectée dans l'intestin. Comme dans le cas précédent, la respiration était surtout costale, mais les mouvements de la paroi thoracique et de la paroi abdominale coïncidaient assez bien entre eux. La pression intestinale s'élevait lentement, mais pas beaucoup, pendant l'inspiration, redescendait pendant l'expiration. Pour obtenir des respirations plus profondes, on coupa les nerfs vago-sympathiques; il en résulta de nouveau, simultanément, une diminution de la fréquence. Maintenant encore, la respiration était principalement costale; l'abdomen se soulevait presque en même temps que la paroi thoracique, mais, durant cette période, la pression intra-intestinale montait beaucoup plus qu'avant la section des nerfs vago-sympathiques. Les deux nerfs phréniques furent alors coupés à leur tour, Après cette nouvelle opération, la paroi thoracique exécutait des mouvements très étendus, la paroi abdominale,

par contre, des mouvements très faibles; de plus, ces mouvements étaient maintenant opposés l'un à l'autre. A chaque inspiration, le thorax se voûtait, l'abdomen se déprimait légèrement. Ce même résultat de la section des nerfs phréniques je l'ai observé, encore plus nettement, dans d'autres expériences, dont il sera question plus loin. Contrairement à ce qui avait lieu avant la section, je voyais la pression intestinale s'abaisser à chaque inspiration, s'élever à chaque expiration.

Ces variations de la pression intra-abdominale, avant et après la section des nerfs phréniques, ont encore, chez le même chien, été mises en évidence d'une autre manière. Au lieu d'être relié au tambour, le tube du cathéter intestinal communiquait avec un manomètre à eau. Avant la section des nerfs phréniques, je constatais ainsi une augmentation de pression lors de l'inspiration, une diminution lors de l'expiration, la différence étant d'environ 5 mm H_2O. Après la section, à chaque inspiration l'eau descendait dans la branche ouverte du manomètre, à chaque expiration elle montait, et la différence s'élevait à environ 10 mm H_2O. On avait oublié, dans cette expérience, de déterminer le point zéro du manomètre, de sorte que la valeur absolue de la pression intra-intestinale resta inconnue. Cette pression absolue ne présentait d'ailleurs ici qu'un intérêt relativement faible, vu que, par l'injection d'eau, elle avait été surélevée artificiellement.

Ces expériences confirment donc la présomption de M. P. Bert et, combinées avec les observations de M. Rosenthal sur les mouvements du diaphragme en cas de paralysie, elles prouvent que dans la contraction diaphragmatique ordinaire, c'est-à-dire lors de l'inspiration, la pression intra-abdominale s'élève. Si, toutefois, la contraction des muscles thoraciques précède celle du diaphragme, il peut se produire d'abord un abaissement de la pression intra-abbominale. Au début de l'inspiration, le diaphragme remonte alors un peu, en se comportant comme s'il était paralysé, et la pression abdominale ne commence à croître que lorsque la contraction s'étend au diaphragme lui-même. De

là vient que cet accroissement fait entièrement défaut et qu'on n'observe à chaque inspiration qu'une diminution de la pression intra-abdominale, quand le diaphragme est réellement paralysé (après la section des nerfs phréniques). Dans ce cas, à chaque inspiration le diaphragme s'élève, pour faire équilibre à l'aspiration intra-thoracique, accrue par l'augmentation de l'élasticité des poumons. Lors de l'expiration, cette aspiration intra-thoracique redevient moindre, d'où il résulte que le diaphragme reprend son ancienne position d'équilibre, qu'il s'abaisse, et que la pression intra-abdominale remonte à la hauteur qu'elle avait avant le début de l'inspiration.

Il est clair que cette pression intra-abdominale peut encore subir beaucoup de changements, en rapport avec les phases de la respiration, s'il existe des obstacles à l'entrée de l'air lors de l'inspiration ou à sa sortie lors de l'expiration, ou si l'expiration devient active, les muscles de l'abdomen se contractant. Aussi, quand on veut étudier seulement l'influence de la contraction du diaphragme sur la pression intra-abdominale, il faut que la respiration de l'animal soit paisible et normale, et que la trachéotomie ait été pratiquée, afin que l'air puisse passer librement; c'est ce qui avait eu lieu dans mes expériences.

Il ressort encore de ces expériences que l'accroissement de la pression intra-abdominale, pendant l'inspiration normale, est peu considérable. Lorsque les intestins n'étaient pas remplis, cet accroissement était à peine accusé par le levier, pourtant très mobile, du tambour, et lorsqu'ils avaient été remplis artificiellement (avec de l'eau), les variations ne s'élevaient, même après une inspiration profonde, qu'à environ 5 mm H_2O. En cas de réplétion intestinale encore plus forte, ces variations, dues à la contraction du diaphragme, prendraient sans doute plus d'amplitude. Toutefois, nous pouvons bien admettre que, dans les circonstances ordinaires, elles sont moindres que celles de la pression intra-thoracique.

Si maintenant les variations de la pression intra-abdominale

étaient, comme le prétend M. Schweinburg, la cause des oscillations qui se produisent dans la pression artérielle, ces oscillations ne devraient pas disparaître après la section des nerfs phréniques, mais devraient avoir lieu, relativement à l'inspiration et à l'expiration, dans un sens précisément inverse de celui où elles se produisaient pendant la respiration normale (c'est-à-dire, avant la section des nerfs phréniques). Voyons ce que l'expérience nous apprend à cet égard.

Dès l'abord il m'a paru très important de savoir comment la pression sanguine se comporte, pendant la respiration, non seulement dans la carotide, mais aussi, et synchroniquement, dans une artère dont le sang vient de traverser la cavité abdominale, par exemple, dans l'artère crurale. Si réellement la pression intra-abdominale a de l'influence sur la circulation du sang dans le tronc de l'aorte abdominale, cette influence doit se faire sentir autrement dans la carotide que dans la crurale. En supposant, par exemple, que l'accroissement de la pression intra-abdominale rétrécisse l'aorte abdominale, une élévation de la pression sanguine pourrait se produire, au moment du rétrécissement, tant dans la carotide que dans la crurale; dans la crurale, cette élévation devrait très rapidement faire place à un abaissement, tandis que dans la carotide, au contraire, elle devrait persister plus longtemps, jusqu'à un certain maximum.

A priori, nous pouvons supposer que la variation de la pression abdominale, durant la respiration ordinaire, n'influera pas d'une manière sensible sur le calibre de l'aorte abdominale. Cette variation de pression est à peine, comme on l'a vu, de quelques millimètres H_2O, la pression dans l'aorte elle-même dépasse de beaucoup 100 mm Hg.

Or, la première chose qui frappe, quand on enregistre simultanément la pression du sang dans la carotide et dans la crurale, c'est que les deux courbes obtenues sont tout à fait semblables; la courbe de la crurale reste, quant à ses accidents, un peu en arrière de celle de la carotide, mais, si la première est portée en avant de cette petite différence, elles montrent

entre elles un parallélisme parfait, dans les circonstances les plus différentes.

J'ai enregistré la pression du sang dans les deux artères en adaptant au kymographion de Ludwig le manomètre double, et en reliant chacun des deux manomètres, de la manière ordinaire, à l'une des artères. Sur les côtes, près du sternum, et sur la ligne blanche de l'abdomen furent placés des coussins d'air, dont chacun communiquait, par transport d'air, avec un tambour enregistreur. Sur le papier sans fin s'inscrivaient donc, en même temps que la pression du sang dans les deux artères, les mouvements de la paroi thoracique et de la paroi abdominale.

La fig. 1, pl. I, donne les tracés d'une pareille expérience. Les courbes sont prises d'un chien narcotisé par la morphine et le chloroforme. Les deux nerfs vago-sympathiques avaient été coupés, pour éliminer les variations de l'action cardiaque durant la respiration. Le libre accès de l'air aux poumons était assuré par la trachéotomie. La courbe supérieure (*Ca*) est celle de la pression sanguine dans la carotide gauche, l'inférieure (*Cr*) celle de la pression dans la crurale gauche. Le parallélisme des deux courbes saute immédiatement aux yeux et est encore plus frappant si l'on considère en même temps les courbes des autres figures de la planche. Dans la fig. 1 nous voyons en outre que les saillies de la courbe crurale, à chaque battement du cœur, sont un peu moins prononcées que celles de la carotide; la même remarque s'applique aux fig. 2 et 3, fournies par le même chien, dans des circonstances que nous indiquerons tout à l'heure. La cause de cette légère différence gît dans le calibre de la petite pièce de liaison, sur laquelle l'artère était liée. La crurale de ce chien étant très étroite, je ne pouvais y engager qu'une pièce de faible diamètre; celle qui servait à relier la carotide avait une ouverture un peu plus large.

Nous voyons dans les deux courbes de la fig. 1 les oscillations respiratoires ordinaires. Dans la crurale, elles sont un peu en retard sur celles de la carotide, mais la différence est minime.

A l'inspiration, abaissement momentané, suivi bientôt d'ascension, laquelle ascension continue au début de l'expiration, pour se changer ensuite en abaissement, — tel est, de même que dans les courbes obtenues antérieurement, la marche constante. La courbe de la capacité et la courbe de la vitesse de circulation existent donc ici l'une et l'autre; surtout lors de l'expiration, la courbe de la capacité (ascension initiale) s'accuse nettement, à cause de la rapidité supérieure de cette phase respiratoire; à l'expiration succédait ordinairement une courte pause. L'inspiration s'accomplit plus lentement [1]).

Ce concours des deux courbes, celle de la capacité et celle de la vitesse de circulation, s'est reproduit dans toutes mes expériences; surtout la vitesse de la respiration a, toutes choses égales d'ailleurs, beaucoup d'influence. A chaque mouvement respiratoire rapide, la courbe de la capacité s'accentue davantage; celle de la vitesse de circulation devient distincte surtout dans les pauses (suspensions). Quand les mouvements respiratoires sont lents, la courbe de la capacité peut s'effacer presque entièrement, de sorte que la courbe de la vitesse de circulation (par exemple, l'ascension lors de l'inspiration lente) reste seule visible.

La pression du sang, dans les deux artères de ce chien, ayant ainsi été inscrite paisiblement pendant quelque temps, les nerfs phréniques, préparés d'avance, furent coupés. Immédiatement après la section se déclarèrent des mouvements respiratoires violents et rapides, durant lesquels les courbes de la pression sanguine ne perdirent pas leur parallélisme. Bientôt, toutefois, l'animal redevint tranquille. Il faisait maintenant, avec les côtes, des inspirations très profondes. Le changement survenu dans le mouvement de la paroi abdominale frappait au premier coup d'œil. On voyait cette paroi se déprimer à chaque inspiration, tandis que, avant la section des nerfs phréniques, elle se voûtait lors de l'inspiration. Les mouvements des leviers rendaient aussi ce changement directement sensible: avant la

1) Les courbes des mouvements respiratoires ayant été omises, les figures, naturellement, n'apprennent rien sur la forme de ces mouvements.

section, les deux leviers oscillaient de la même manière, se levaient et s'abaissaient à peu près ensemble; après, ils se mouvaient en sens inverse l'un de l'autre. Mais, où le changement s'accuse le mieux, c'est dans les courbes elles-mêmes. A chaque relèvement très prononcé de la courbe tracée par le levier du thorax, correspond un abaissement de la courbe du levier de l'abdomen. Nous avons donc là, de nouveau, une preuve manifeste de l'influence de la section des nerfs phréniques, influence qui donne lieu à l'ascension du diaphragme à chaque inspiration et, par suite, comme nous l'avons vu, à l'abaissement de la pression intra-abdominale pendant cette période.

Quelque changement s'est-il maintenant produit dans les oscillations de la pression artérielle? La fig. 2 donne la réponse à cette question; tout commentaire serait à peu près superflu. Les oscillations respiratoires ont persisté tout entières et ont même pris un peu plus d'amplitude. Cela tient de nouveau à la différence de profondeur de la respiration. Dans la fig. 1, les respirations étaient superficielles; dans la fig. 2, l'influence de la contraction du diaphragme, à la vérité, est supprimée et cette suppression est au préjudice de l'épanouissement des poumons; mais les mouvements des côtes ont tellement gagné en étendue que la perte en question est plus que compensée et que l'épanouissement des poumons est donc plus complet que dans la fig. 1. Quant à la forme des oscillations, elle est restée la même. — Cet exemple est d'autant plus instructif que la fig. 1 a été prise, à dessein, d'une partie de la courbe où fortuitement la respiration diaphragmatique existait presque seule, où la paroi thoracique n'exécutait que des mouvements très faibles.

Par surcroît, la cavité abdominale a été ouverte depuis le sternum jusque près de l'arcade pubienne, dans la ligne blanche. On voit alors les intestins mis à nu s'enfoncer à chaque inspiration, s'élever à chaque expiration. La fig. 3 donne les courbes de la pression sanguine. Les oscillations respiratoires ordinaires s'y retrouvent.

J'ai répété cette expérience sur trois autres chiens (pesant respectivement 8, 18½ et 5½ kilogrammes), dans les mêmes circonstances et avec le même résultat. Dans une seule de ces trois expériences la paroi abdominale, après la section des nerfs phréniques, continua encore à s'élever un peu pendant l'inspiration, ce qui me fit supposer d'abord que toutes les branches des nerfs phréniques n'avaient pas été coupées. Mais, en observant avec soin, je reconnus que lorsque l'inspiration costale est très profonde, lorsque les dernières côtes sont donc très fortement soulevées, la paroi abdominale est en quelque sorte tendue entre ces côtes et le bord du bassin. Cela ne peut naturellement avoir lieu que si la paroi abdominale est lâche au début de l'inspiration, c'est-à-dire si la cavité de l'abdomen est peu remplie. La preuve que le phénomène était dû à cette cause, et non à la paralysie incomplète du diaphragme, fut obtenue en ouvrant la cavité abdominale. On put alors voir de nouveau les intestins se renfoncer à chaque inspiration.

Les résultats de ces expériences sont déjà très propres à nous éclairer au sujet de l'influence des variations de la pression intra-abdominale sur la pression du sang dans les artères. En montrant que la forme et l'amplitude des oscillations respiratoires n'éprouvent pas de changement lorsqu'on intervertit complètement les variations de la pression intra-abdominale par rapport aux mouvements respiratoires, nos expériences mettent hors de doute que ces variations de pression ne peuvent ni être la cause principale de la production des oscillations respiratoires, ni exercer sur elles une influence prépondérante.

Aussi je ne m'explique pas l'assertion de M. Schweinburg. Après les recherches ci-dessus citées de M. Rosenthal et de M. P. Bert, il aurait déjà dû s'attendre, si réellement il regardait la pression intra-abdominale comme exerçant une influence prépondérante, à ce que, après la section des nerfs phréniques, les oscillations respiratoires seraient complètement renversées par rapport aux phases de la respiration, et non à ce qu'elles disparaîtraient. Dès lors, en effet, il était établi, par de nom-

breuses expériences, que l'ouverture de l'abdomen, bien que supprimant la pression intra-abdominale, ne fait pas évanouir les oscillations artérielles et n'en diminue même pas l'amplitude. Que l'ouverture de l'abdomen peut toutefois avoir de l'influence sur la forme de ces oscillations, c'est un fait que jai déjà signalé dans mon Mémoire précédent sur ce sujet, mais en l'expliquant par des raisons toutes différentes, à savoir, par l'élargissement que les vaisseaux sanguins de la cavité abdominale éprouvent quand cette cavité reste longtemps ouverte, et par l'abaissement de la pression artérielle, qui en est la conséquence.

L'augmentation ou la diminution de la pression intra-abdominale n'a-t-elle donc absolument aucune influence sur la pression du sang dans les artères?

La fig. 4 représente la pression sanguine dans la carotide droite et la crurale droite d'un chien, assoupi par l'injection de laudanum de Sydenham dans la jugulaire droite. Les nerfs vago-sympathiques étaient coupés, la trachéotomie avait été pratiquée. Un coussin d'air se trouvait placé sur les côtes, latéralement au sternum, et communiquait par transport d'air avec un tambour, dont le levier inscrivait les mouvements respiratoires. Un second tambour était relié, de la même manière, à un autre coussin d'air, qui pouvait être appliqué sur la paroi abdominale; en exerçant alors avec la main une forte pression sur ce coussin d'air, on déprimait en même temps la paroi de l'abdomen, et la cavité de celui-ci était rapetissée; le levier du tambour relié à ce coussin d'air indiquait par son ascension le moment et la durée de la pression exercée sur la paroi abdominale; quant cette pression cessait (la main étant retirée), le levier retombait.

Par suite de la section des nerfs vago-sympathiques, la respiration était peu fréquente, une pause bien marquée existant après chaque expiration; la durée de cette pause était suffisante pour que, dans l'intervalle, on pût exercer une pression sur l'abdomen et en observer l'effet sur la pression du sang dans les deux artères.

Dans la fig. 4 nous voyons la pression sanguine s'abaisser pendant l'inspiration, s'élever pendant l'expiration, et de nouveau s'abaisser lentement dans la pause qui succède à l'expiration. Ainsi, pendant les mouvements respiratoires, on ne distingue que les courbes de capacité, à cause de la rapidité du mouvement respiratoire; dans la pause apparaît la courbe de la vitesse de circulation. En *a* et *b* il a été profité de cette pause pour diminuer, par pression directe sur l'abdomen, la capacité de la cavité abdominale. Comme on le voit, la pression sanguine s'élève pendant qu'on comprime l'abdomen, s'abaisse pendant qu'on le laisse se relâcher, et ensuite (donc, dans la pause, après le relâchement) se relève; l'inspiration, qui suit alors à très court intervalle, change de nouveau cette élévation en abaissement.

J'ai voulu étudier aussi l'effet d'une pression continue, et celui de la pause, après que la pression a cessé. Dans toutes les expériences de ce genre, il importe beaucoup plus, en effet, de connaître les conséquences d'un état statique que celles d'un état incessamment variable. C'est seulement après avoir reconnu l'effet d'une pression *augmentée* ou *diminuée*, qu'on peut juger de l'influence exercée *pendant* l'augmentation ou la diminution de cette pression. De là vient que j'ai toujours attaché tant d'importance aux phénomènes qui se manifestent dans la *suspension* inspiratoire ou expiratoire.

Pour l'objet que j'avais en vue, la pause qui sépare les respirations successives était encore trop courte. Je curarisai donc un chien, par injection dans la veine jugulaire, après avoir pratiqué la trachéotomie; les nerfs vago-sympathiques furent coupés et la respiration entretenue au moyen d'un soufflet. Sur le côté de la canule trachéale était fixé un tube de caoutchouc, relié à un tambour enregistreur, pour l'inscription des variations de la pression dans la trachée. Après quelques bonnes insufflations, la respiration fut suspendue et une pression fut exercée, de la même manière que dans le cas de la fig. 4, sur la paroi de l'abdomen. La fig. 5 donne un exemple du résultat de cette

pression. Vers la fin de la courbe, là où les compressions et les relâchements de l'abdomen se succèdent sans interruption, on trouve de nouveau une élévation de la pression sanguine pendant la compression, un abaissement pendant le relâchement; mais la première partie de la courbe nous fait connaître l'effet des suspensions. Lorsque la pression sur la paroi abdominale est maintenue, la pression sanguine s'abaisse, et elle se relève dans la pause qui fait suite au relâchement de l'abdomen (donc, après l'abaissement produit *pendant* le relâchement).

Que nous apprennent maintenant ces deux expériences? [1]) Elles nous montrent que lorsqu'une pression est exercée, dans les circonstances susdites, sur la paroi abdominale, la pression sanguine artérielle éprouve des oscillations synchrones aux variations de la pression intra-abdominale, et que ces oscillations sont semblables dans la carotide et dans la crurale. Ce dernier point est de grande importance. Il en résulte avec certitude que les variations de la pression intra-abdominale n'ont pas d'influence sur le calibre de l'aorte abdominale, ou n'ont qu'une influence trop faible pour changer d'une manière appréciable la pression dans le système artériel. Si, en effet, l'accroissement de la pression intra-abdominale (et dans nos expériences cet accroissement était beaucoup plus considérable que dans une inspiration ordinaire) déterminait le rétrécissement de l'aorte abdominale, la pression sanguine pourrait bien s'élever, tant dans la carotide que dans la crurale, *pendant* qu'on comprime l'abdomen, mais ensuite, la compression persistant, les courbes de la carotide et de la crurale devraient perdre leur parallélisme. Celle de la carotide devrait se maintenir à la hauteur atteinte, ou s'élever encore davantage, celle de la crurale devrait, au contraire, s'abaisser. Or, nous le voyons, le parallélisme reste parfait. Je ne parvenais à le déranger, dans mes expériences, qu'en déprimant la paroi abdominale assez profondément pour

---

1) J'ai obtenu les mêmes résultats en répétant ces expériences sur d'autres chiens.

sentir battre l'aorte sous l'extrémité de mes doigts, et en maintenant cette compression.

Les oscillations artérielles dépendent-elles donc des variations de la pression sur les ramifications aortiques (y compris les capillaires) des viscères abdominaux? Dans cette hypothèse encore, l'abaissement de la courbe lorsque la pression sur l'abdomen est maintenue, son ascension dans la pause après le relâchement, resteraient inexplicables. Car, en supposant que cette pression détermine le rétrécissement d'une si grande partie du système vasculaire qu'il en résulte, au moment où elle se produit, une élévation de la pression sanguine dans les autres ramifications de l'aorte, cette élévation, toutes choses égales d'ailleurs, ne devrait évidemment pas se changer en abaissement lorsque la pression abdominale persiste.

En ce qui concerne l'explication des oscillations respiratoires de la pression sanguine artérielle au moyen de variations dans la pression intra-abdominale, les résultats de ces expériences sont décisifs. Comparons seulement, fig. 4, en premier lieu, la pression sanguine lors de l'inspiration normale et lors d'une pression artificielle sur la paroi de l'abdomen (dans les deux cas, la pression intra-abdominale est augmentée); en second lieu, la pression sanguine lors de l'expiration normale, avec suspension expiratoire subséquente, et lors du relâchement de la paroi abdominale avec pause subséquente (dans les deux cas, la pression intra-abdominale est et reste abaissée de nouveau à sa valeur normale); nous voyons alors, tant dans la première que dans la seconde comparaison, que les oscillations de la pression artérielle sont, d'un cas à l'autre, exactement opposées. Par exemple: en cas d'expiration normale, élévation de la pression sanguine, avec abaissement dans la suspension; en cas de relâchement de la paroi abdominale, abaissement, avec élévation dans la pause.

Comment donc rendre compte de ces oscillations dans les deux expériences? Deux possibilités se laissent concevoir.

D'abord, on peut supposer que les oscillations de la pression

du sang artériel, lors de ces variations dans la pression intra-abdominale, sont dues à l'augmentation ou à la diminution de l'apport au cœur droit, par suite du rétrécissement ou de l'élargissement de la veine cave inférieure abdominale.

En second lieu, il ne faut pas oublier que lorsque, comme dans les expériences précitées, nous rétrécissons la cavité abdominale en déprimant sa paroi, le diaphragme est poussé vers le haut et la capacité de la cavité thoracique est par suite diminuée, d'où résulte un état expiratoire des poumons; quand la pression sur l'abdomen est supprimée, le diaphragme reprend sa position normale, s'abaisse, et une inspiration en est la conséquence; c'est effectivement ce que montrait le levier qui marquait les variations de la pression dans la trachée chez le chien curarisé. En ce qui concerne les poumons, le fait d'exercer une pression sur l'abdomen, puis de l'abandonner à lui-même, donne donc lieu à une expiration, suivie d'une inspiration. Ces changements dans le volume des poumons doivent entraîner des changements correspondants dans la circulation pulmonaire.

Or, quant aux changements que la circulation pulmonaire subit pendant l'expiration et aux conséquences qui en résultent pour la pression sanguine artérielle, nous savons que, dans les circonstances ordinaires, il se produit lors de l'expiration d'abord une élévation et ensuite un abaissement de la pression sanguine, donc la même chose que ce qu'on observe en comprimant l'abdomen et en maintenant cette pression. De même, l'abaissement initial avec élévation subséquente de la pression sanguine, résultat de l'inspiration ordinaire, se retrouve lors du relâchement de la paroi abdominale comprimée et dans la pause qui la suit. Les oscillations de la pression artérielle, qu'on détermine en comprimant et relâchant alternativement la paroi abdominale, se laissent donc expliquer complètement par les effets qui doivent se produire en vertu de l'expiration et de l'inspiration artificiellement provoquées par la manœuvre en question.

Si dans les courbes de la fig. 5, obtenues lorsque la compression et le relâchement de l'abdomen se suivaient sans pauses

intermédiaires, nous ne voyons, pendant la première, rien que de l'élévation, pendant le second, rien que de l'abaissement, cela peut tenir simplement à la rapidité avec laquelle s'exécutaient la compression et le relâchement, à la rapidité avec laquelle, par conséquent, se succédaient l'expiration et l'inspiration artificielles et qui ne laissait apparaître que les courbes de capacité. Notre explication est donc en parfait accord avec tous les phénomènes mentionnés.

A l'occasion de ces phénomènes, que la pression artérielle présente en cas de pression exercée sur la paroi abdominale, il faut rappeler les expériences de M. Kuhn, déjà citées plus haut (p. 6). M. Kuhn a observé que des oscillations artérielles se produisent encore, à la suite de variations dans la pression intra-abdominale, même lorsque le thorax est ouvert, et il a pensé que ces oscillations peuvent s'expliquer par l'augmentation ou la diminution de l'afflux du sang au cœur droit. On ne doit pas perdre de vue, toutefois, que lorsque la paroi thoracique, — soit les côtes, soit le diaphragme, — exécute, artificiellement ou par voie d'action musculaire, des mouvements, les poumons peuvent très facilement, même en cas de thorax ouvert, y participer plus ou moins. Très facilement, en effet, ils restent collés à la paroi thoracique, et alors, entraînés dans ses mouvements, ils s'épanouissent bien dûment. Dans les expériences avec respiration artificielle et thorax ouvert, on peut fréquemment observer cette adhésion, et, en pareil cas, des variations se produiraient de nouveau dans la circulation pulmonaire. Néanmoins, même quand on veille à ce que les poumons s'affaissent complètement et ne restent pas collés à la paroi, on voit les pressions sur l'abdomen déterminer encore des oscillations dans la pression artérielle, oscillations qui, eu égard à ce qui précède, ne peuvent dépendre que de changements dans le calibre de la veine cave inférieure abdominale. Tout à l'heure nous reviendrons là-dessus.

Préalablement, je dois encore dire quelques mots de la fig. 6. Elle offre un exemple de la pression sanguine dans la carotide

et la crurale gauches d'un chien curarisé, chez lequel la respiration était entretenue à l'aide du soufflet et dont les nerfs vago-sympathiques étaient coupés. Ici encore, nous voyons les deux courbes marcher parallèlement; ici encore, l'influence de la circulation pulmonaire est manifeste. Les oscillations sont, par rapport aux phases d'épanouissement des poumons, exactement l'opposé de ce qu'elles sont dans la respiration normale, et nous savons que la circulation pulmonaire aussi se comporte dans ses variations d'une manière précisément inverse, lorsque à l'épanouissement et l'affaissement normaux on substitue l'insufflation et l'affaissement. Déjà antérieurement [1]) j'ai appelé l'attention sur le fait que, chez l'animal vivant curarisé et ayant la cavité abdominale ouverte, on peut faire épanouir les poumons tantôt par aspiration (en tirant sur le diaphragme), tantôt par insufflation (avec un soufflet), et que, dans ces deux cas, les oscillations de la pression artérielle se présentent dans des relations exactement contraires.

Quand l'expérience a lieu le thorax et l'abdomen fermés, la pression intra-abdominale varie de la même manière lors de l'insufflation et lors de l'inspiration normale, mais les oscillations de la pression sanguine sont inverses: nouvelle preuve *contre* l'influence des variations de la pression intra-abdominale.

Nous avons vu que M. Schweinburg, pour démontrer cette influence, cite, dans son second Mémoire, encore une autre expérience. Différentes fois, chez des chiens narcotisés et respirant normalement, j'ai introduit la main dans la cavité abdominale ouverte, et oblitéré, en la comprimant entre les doigts, l'aorte abdominale. La courbe de la crurale s'abaisse alors rapidement, jusqu'à quelques mm Hg au-dessus du zéro; celle de la carotide s'élève. On attend que ce mouvement ascensionnel soit achevé, et alors on constate, synchroniquement avec les respirations, des oscillations de la pression du sang dans la carotide. Même quand le thorax et l'abdomen sont largement ouverts et que

---

[1]) *l.c.*, p. 186.

l'aorte thoracique est comprimée au-dessus du diaphragme, la pression sanguine élevée de la carotide continue à présenter des oscillations synchrones avec les insufflations et les affaissements des poumons.

De ce qui précède, il ressort que les variations de la pression intra-abdominale, dues à la respiration, n'influent pas *directement* sur la pression du sang artériel: si la paroi externe de l'aorte abdominale et de celles de ses ramifications qui occupent la cavité de l'abdomen doit naturellement éprouver les susdites variations, celles-ci, dans les circonstances ordinaires, sont trop faibles pour exercer la moindre action sur la pression sanguine artérielle.

Mais ce défaut d'influence directe n'existe pas seulement pour les variations de pression auxquelles donne lieu la respiration normale et qui n'ont qu'une valeur de quelques mm Hg: nous avons vu que, même en cas de pressions artificielles assez fortes sur l'abdomen, les changements qui se produisent alors dans la pression sanguine artérielle ne sauraient dépendre de changements dans le calibre de l'aorte abdominale ou de ses subdivisions.

Si nous recherchons maintenant ce qui est connu au sujet de la grandeur des variations de la pression intra-thoracique, nous trouvons que ces variations n'atteignent également qu'un petit nombre de mm Hg [1]), et que par conséquent elles n'auront pas non plus d'influence sur le calibre de l'aorte thoracique, dans laquelle, normalement, le sang se trouve aussi sous une haute pression, aussi haute, pour le moins, que dans l'aorte abdominale. Ainsi, pendant la respiration normale et pour une pression sanguine normale, il ne sera exercé, ni dans le thorax ni dans l'abdomen, par des changements du calibre de l'aorte, quelque influence sur la pression artérielle.

Il en est autrement de l'influence de ces variations de pression

1) Voir: Donders, *Beiträge*, dans *Zeitschr. f. rat. Med.*, t. III, p. 287: et Heynsius, *Sur la valeur de la pression négative intrathoracique pendant la respiration normale*, dans *Arch. néerl.*, t. XVII, p. 299.

sur le diamètre intérieur des veines, comme nous l'avons déjà vu en ce qui concerne l'influence de la pression intrathoracique sur le calibre des veines pulmonaires, et comme allons maintenant le montrer pour ce qui regarde l'influence de la pression intra-abdominale sur le calibre des veines de la cavité de l'abdomen. J'ai déjà mentionné ce que d'autres ont dit à cet égard, et moi-même j'ai constaté que chez un chien curarisé, ayant les nerfs vago-sympathiques coupés et le thorax ouvert, et dont les poumons n'adhéraient pas, des oscillations se produisaient encore dans la pression sanguine artérielle, à la suite de variations de la pression intra-abdominale. Les oscillations avaient très peu d'amplitude, ce qui tenait peut-être en partie à ce que peu à peu, par l'effet du curare, du refroidissement, etc., la pression sanguine s'était notablement abaissée. Tant dans la carotide que dans la crurale j'observais, en pressant sur l'abdomen, une légère élévation, puis un lent abaissement lorsque la pression persistait; en relâchant la paroi abdominale, un léger abaissement, faisant place, dans la pause, à une très lente élévation. Ces oscillations de la pression artérielle ne suivaient *pas directement* les variations de la pression intra-abdominale, mais à quelque distance. Je crois pouvoir les regarder bien réellement, à l'exclusion de toute autre cause, comme la conséquence des changements de calibre des veines abdominales. M. Kowalewsky [1]) a déjà montré, en effet, qu'à l'état de repos des poumons on peut imiter les oscillations respiratoires de la pression sanguine artérielle, en comprimant et relâchant alternativement la veine cave. Moi-même, en enregistrant la pression sanguine dans la carotide et dans la crurale, le thorax étant ouvert et la respiration entretenue artificiellement, j'ai vu les deux courbes s'abaisser parallèlement lorsque, pendant une suspension de la respiration, on comprimait la veine cave inférieure, puis se relever parallèlement après que la veine avait

[1]) N. Kowalewsky, *Ueber die Einwirkungen der künstlichen Athmung auf den Druck im Aortensystem*, dans *Archiv f. Physiol.* v. du Bois-Reymond, 1877, p. 416.

été relâchée. Mais dans les deux courbes il subsistait encore, même pendant l'abaissement, des oscillations synchrones avec les changements de volume des poumons, quand la veine cave inférieure était comprimée *durant* la respiration artificielle.

Ces expériences ne permettent donc guère de douter que l'augmentation ou la diminution de l'apport de sang au cœur droit, par la veine cave inférieure, fasse sentir son influence sur la pression sanguine artérielle.

Pendant la respiration, il existe, comme nous l'avons déjà dit, deux causes qui font varier l'apport au cœur droit. Lors de l'inspiration, la pression négative intrathoracique augmente et agit favorablement sur le cours du sang dans les veines caves, tant inférieure que supérieure; simultanément, par l'augmentation de la pression intra-abdominale, le sang est refoulé de la veine cave inférieure vers le thorax. Il y a donc une double raison pour que pendant l'inspiration le cours du sang vers le cœur droit soit activé, et puisque nous avons reconnu que les variations de l'apport au cœur droit se font sentir dans le système aortique, cet accroissement d'apport pendant l'inspiration devra se manifester dans l'aorte comme élévation de la pression sanguine. Il constitue donc un facteur auxiliaire de l'élévation normale qui se produit pendant l'inspiration. Nous avons vu, en effet, que cette élévation est ordinairement précédée d'un abaissement, dû à l'augmentation de capacité des vaisseaux pulmonaires; mais, dans cette période, l'influence de l'accroissement d'apport au cœur droit ne se fera pas encore sentir, un certain temps, comme nous l'avons dit, étant nécessaire pour cela. Cette influence peut donc être attendue vers le moment où la courbe de la vitesse de circulation apparaît dans l'aorte.

Il est évident d'ailleurs que l'apport au cœur droit ne continue pas régulièrement à s'accroître pendant tout le cours de l'inspiration, mais que peu à peu il diminue de nouveau, pour redevenir, peut-être avant la fin de l'inspiration et certainement lors de la suspension inspiratoire, égal à ce qu'il était au début de l'inspiration. L'augmentation de l'apport au cœur droit, par

suite de l'augmentation de l'aspiration intrathoracique et de l'augmentation de la pression intra-abdominale, n'a lieu, en effet, que durant le changement de calibre de la veine cave, et cesse lorsque ce calibre est redevenu constant. A cet égard, les idées des auteurs ne sont pas toujours parfaitement exactes. Je me permettrai, par exemple, de présenter quelques observations au sujet des vues émises sur ce point par M. Rollett [1]). Après avoir rappelé qu'il existe dans le thorax une pression négative, qui règne donc sur tous les organes contenus dans cette cavité et par conséquent aussi sur les veines, il poursuit ainsi: „Par contre, sur la surface extérieure des veines situées en dehors du thorax, pèse la pression atmosphérique, ou une pression encore un peu plus forte, vu qu'il s'y joint la tension des tissus parcourus par les veines. A tout instant, le sang est donc poussé vers le thorax". Les mots „à tout instant" ont évidemment rapport aux veines, et l'idée est donc que, par suite de la différence de pression sur les veines situées à l'intérieur et à l'extérieur du thorax, le cours du sang vers le thorax est activé aussi bien pendant l'expiration que pendant l'inspiration. Il est vrai que M. Donders, dans le Mémoire déjà cité [2]), a écrit: „Une vérité, qui ne manque pas d'importance, en ressort immédiatement: même pendant l'expiration, le cœur et les vaisseaux intrathoraciques sont soumis à une pression moins élevée que les vaisseaux distribués dans les autres parties du corps; le sang veineux est donc aspiré d'une manière continue vers la cavité thoracique". Mais il faut remarquer que M. Donders nomme ici, à la fois, le cœur et les vaisseaux. Or, il est certain que, pendant la respiration normale, la diastole du cœur sera toujours facilitée par la pression négative, tant à l'inspiration qu'à l'expiration, parce que, comme M. Donders l'a montré, cette pression négative existe aussi bien dans l'une que dans l'autre de ces phases; en ce sens, l'afflux du sang veineux au

---

[1]) Rollett, *Physiologie des Blutes und der Blutbewegung*, dans *Handbuch der Physiologie von* Dr. L. Hermann, t. IV, 1e p., p. 330.

[2]) *l. c.* p. 305.

cœur sera donc accéléré „d'une manière continue" (tant à l'inspiration qu'à l'expiration).

Mais, si l'on distingue entre l'effet de cette aspiration sur le cœur et celui sur les veines, la conclusion précédente ne sera pas applicable à ces dernières. La pression, qu'elle soit négative ou positive, agit sur la paroi extérieure du vaisseau sanguin, et non sur le sang lui-même. La circulation du sang ne peut donc pas en être activée ou entravée directement, mais seulement par l'intermédiaire des changements de calibre que le vaisseau sanguin subit sous l'influence de cette pression extérieure variable. Le calibre d'un vaisseau sanguin dépend, en effet, de trois facteurs: 1° la pression du sang sur la paroi interne, 2° la pression du dehors sur la face externe, 3° l'élasticité de la paroi. Le premier de ces facteurs étant pour un instant regardé comme constant, le calibre changera, par exemple s'élargira, lorsque la pression extérieure diminue ou qu'une aspiration est exercée sur la paroi externe, et cet élargissement continuera jusqu'à que la paroi, dans son nouvel état de plus grande distension, fasse de nouveau équilibre à la pression extérieure diminuée. Si alors cette aspiration reste constante, le vaisseau conservera un calibre constant, et le sang coulera sîmplement par un canal un peu plus large. En faisant donc abstraction de la diminution de résistance qui résulte de l'élargissement du vaisseau, on voit que la pression extérieure, pourvu qu'elle demeure la même, n'aura plus aucune influence sur la circulation; ce n'est que *pendant le changement* de cette pression extérieure, donc pendant la période où le calibre du vaisseau augmentait, qu'une action directe était exercée sur le cours du sang.

Pendant l'élargissement du vaisseau, le sang sera aspiré vers la partie qui s'élargit, et réciproquement, lorsque la pression extérieure augmente et que par suite le vaisseau est rétréci, le sang sera chassé de cette partie, pendant tout le temps que le rétrécissement s'opère. *C'est donc seulement dans ses périodes de variation que la pression extérieure peut être regardée comme*

une force d'impulsion ou d'aspiration pour le sang; cet effet cesse dès que la pression extérieure est devenue constante.

Appliquons ce principe mécanique aux changements de calibre des veines intrathoraciques pendant la respiration. L'augmentation de l'aspiration intrathoracique, lors de l'inspiration, fera élargir les veines et, par suite, agira comme force aspiratrice sur le sang qui se rend à ces veines. Mais elle n'agira ainsi que *pendant* l'inspiration. Dans la suspension inspiratoire, l'aspiration n'a plus d'influence sur la circulation dans ces veines, si ce n'est que le sang éprouve un peu moins de résistance dans les veines une fois élargies. Pendant l'expiration, période de décroissement pour l'aspiration thoracique, le calibre des veines en question sera de nouveau diminué. Ce rétrécissement, bien entendu, n'agira pas comme force aspiratrice, mais au contraire comme force refoulante, sur le sang qui coule dans ces veines. En supposant que la vitesse de l'inspiration et de l'expiration soit la même et que les deux mouvements aient une étendue égale, l'augmentation et la diminution de l'aspiration intrathoracique se produiront dans le même temps et auront des valeurs égales, l'élargissement des veines aura lieu avec la même rapidité et entre les mêmes limites que leur rétrécissement; l'avantage que l'inspiration apporte au cours du sang des veines phériphériques vers les veines du thorax serait alors exactement neutralisé par le désavantage qui résulte de l'expiration. Mais les valvules des veines [1]) empêchent le reflux du sang, et grâce à elles il devient donc possible que les variations de la pression négative, au cours de la respiration, favorisent la circulation du sang dans les veines du thorax. Si les valvules n'existaient pas, ces variations resteraient sans influence.

La même chose peut être dite des variations de la pression dans la cavité abdominale, où le rétrécissement des veines *pendant* l'inspiration pousse le sang vers le cœur droit, parce

---

[1]) Sous ce rapport, le cœur lui-même doit être considéré comme une valve à l'extrémité du système veineux.

que les valvules s'opposent au reflux; ici encore, en l'absence de ces valvules, les susdites variations ne pourraient activer le cours du sang vers le cœur droit. *Les variations tant de la pression intrathoracique que de la pression intra-abdominale agissent donc sur les veines comme pompe aspirante et foulante, et cette action est rendue possible par les valvules du système veineux.*

Par l'augmentation de la pression intra-abdominale, lors de l'inspiration, les veines sont donc un peu rétrécies et le sang est poussé, pendant ce rétrécissement, vers le cœur droit; mais si cette pression intra-abdominale augmentée et par conséquent aussi le rétrécissement des vaisseaux persistent, le sang, traversant des canaux plus étroits, éprouvera plus de résistance et l'apport au cœur droit devra diminuer. Il est donc à présumer que dans la suspension inspiratoire la quantité de sang qui se rend au cœur droit ne redevient pas seulement la même qu'au début de l'inspiration, mais tombe encore au-dessous de cette quantité initiale, raison de plus pour qu'en fin de compte, pendant cette suspension inspiratoire, la pression sanguine redescende dans l'aorte.

Si, dans les circonstances normales, nous devons donc refuser aux variations de la pression intra-abdominale toute action directe sur la pression sanguine artérielle, il n'en est pas moins vrai qu'indirectement, par leur action sur la circulation veineuse, elles influencent la pression dans le système aortique; l'augmentation qu'elles déterminent, pendant l'inspiration normale, dans l'apport de sang au cœur droit, profite à l'élévation ordinaire (courbe de la vitesse de circulation) de la pression sanguine artérielle.

UTRECHT, novembre 1883.

EXPLICATION DES FIGURES.

(Pl. I.)

Toutes les figures sont des courbes obtenues pour la pression du sang dans les artères carotide et crurale du chien, à l'aide de l'appareil enregistreur de Ludwig.

Toutes se rapportent à la pression sanguine dans la circulation normale, après section des nerfs vago-sympathiques.

La courbe supérieure *Ca* est le tracé de la pression sanguine dans la carotide, la courbe placée au-dessous, *Cr*, celui de la pression dans la crurale; la droite *Z* est une ligne horizontale, située un certain nombre de millimètres au-dessus de la ligne zéro du manomètre enregistreur de la carotide, et un autre nombre de millimètres au-dessus de la ligne zéro du manomètre enregistreur de la crurale; la courbe inférieure *S* indique le temps: chaque division horizontale représente 1 seconde.

Les courbes vont toutes dans le sens de la flèche, soit de droite à gauche.

Pour ménager l'espace, la courbe des mouvements respiratoires ou de la pression sur l'abdomen a été omise; à sa place, on a marqué sur chacune des lignes *Ca*, *Cr*, *Z* et *S*, par une ligne perpendiculaire, le commencement et la fin de chaque phase respiratoire ou de chaque phase de pression.

I	signifie:	Inspiration.
E	"	Expiration.
E.P.	"	Pause après l'expiration.
G	"	Insufflation.
C	"	Affaissement.
Pr	"	Pression sur la paroi abdominale.
L	"	Relâchement de la paroi abdominale.
Pr.P.	"	Maintien de la pression sur la paroi abdominale.
L.P.	"	Pause après le relâchement de la paroi abdominale.

Fig. 1. Pression du sang dans la carotide et la crurale gauches d'un chien de 5 kilogr., narcotisé par la morphine et le chloroforme, les nerfs vago-sympathiques coupés et la trachée ouverte. *Z* se trouve à 53 mm au-dessus de la ligne zéro de la carotide, et à 67 mm. au-dessus de celle de la crurale. Pression moyenne du sang dans la carotide, environ 176 mm Hg, dans la crurale, environ 168 mm Hg.

Fig. 2. Pression du sang chez le même chien de la fig. 1, après qu'on eut sectionné en outre les nerfs phréniques. *Z* est à 56 mm au-dessus de

la ligne zéro de la carotide, à 70 mm au-dessus de celle de la crurale. Pression moyenne du sang dans la carotide, environ 184 mm Hg, dans la crurale, environ 176 mm Hg.

Fig. 3. Pression du sang chez le même chien de la fig. 2, après qu'on eut ouvert en outre la cavité abdominale. *Z* est à 57 mm au-dessus de la ligne zéro de la carotide, à 71 mm au-dessus de celle de la crurale. Pression moyenne du sang dans la carotide, environ 176 mm Hg, dans la crurale, environ 168 mm Hg.

Fig. 4. Pression du sang dans la carotide et la crurale droites d'un chien de 10 kilogr., narcotisé par injection de Laud. liq. Syd. dans la jugulaire droite; les nerfs vago-sympathiques coupés, la trachée ouverte. Dans la pause entre les respirations successives, on a comprimé l'abdomen. *Z* est à ? [1]) mm au-dessus de la ligne zéro de la carotide, à 75 mm au-dessus de celle de la crurale. Pression moyenne du sang dans la carotide, ? mm Hg, dans la crurale, environ 200 mm Hg.

Fig. 5. Pression du sang dans la carotide et la crurale gauches d'un chien de 6¼ kilogr., curarisé. La respiration était entretenue, après la section des nerfs vago-sympathiques, le thorax et l'abdomen restant fermés, au moyen d'un soufflet. Les courbes sont prises à un moment où la respiration était suspendue et où des pressions étaient exercées sur la paroi abdominale. *Z* est à 52 mm au-dessus de la ligne zéro de la carotide, à 68 mm au-dessus de celle de la crurale. Pression moyenne du sang dans la carotide, environ 176 mm Hg, dans la crurale, environ 168 mm Hg.

Fig. 6. Pression du sang dans la carotide et la crurale gauches d'un chien de 21,5 kilogr., curarisé, les nerfs vago-sympathiques coupés, le thorax et l'abdomen fermés, la respiration entretenue au moyen du soufflet. *Z* est à 52 mm au-dessus de la ligne zéro de la carotide, à 67 mm au-dessus de celle de la crurale. Pression moyenne du sang dans la carotide, environ 180 mm Hg, dans la crurale, environ 172 mm Hg.

---

[1]) Par suite de circonstances accidentelles, le zéro du manomètre de la carotide a été déterminé fautivement dans cette expérience, de sorte que la pression moyenne du sang ne peut pas être donnée en chiffres.

RECHERCHES

SUR LA

CONTAGIOSITÉ DE LA MALADIE DE GOMME CHEZ LES PLANTES,

PAR

M. W. BEYERINCK.

Aperçu général.

En 1878, M. E. Prillieux [1]) a montré que les grains vivants du Blé poulard (*Triticum turgidum*) sont assez souvent attaqués et en partie détruits par une bactérie pigmentaire rouge, maladie qni m'est bien connue par les collections de l'Ecole d'agriculture de l'Etat, à Wageningen.

M. H. Wakker [2]) a fait voir, en 1883, que la maladie dite le „jaune" des jacinthes est également le résultat de l'activité de bactéries, qui peuvent exister dans les tissus vivants de la plante.

C'étaient là, à ma connaissance, les premiers exemples authentiques de maladies causées, chez les plantes, par la présence de bactéries; ils autorisaient la supposition que d'autres maladies encore, dans le règne végétal, étaient également dues à ces organismes, et je me demandai si la gomme, qui dans certaines circonstances découle des organes blessés des Amygdalées, ne pourrait pas être du mucilage de bactéries. Le fait surtout que les parois des vaisseaux et les fibres libériennes sont susceptibles de se transformer en gomme, me portait à attendre

1) *Sur la coloration et le mode d'altération des blés roses*, dans *Ann. d. sc. nat. Bot.*, t. VIII, 1878, p. 248.

2) *Botanisches Centralblatt*, 1883, p.315.

une réponse affirmative à cette question. Avant moi, d'ailleurs, d'autres avaient déjà eu la même idée, comme je l'ai reconnu par un passage d'un article publié dans l'une des dernières années du *Gardener's Chronicle*, passage, toutefois, que je ne puis plus retrouver. Je ne parvins pas, il est vrai, à découvrir des bactéries dans tout morceau quelconque de gomme, et M. le professeur De Vries, dont j'invoquai le secours, ne les vit pas non plus; mais dans quelques petits fragments je trouvai des bactéries en grand nombre, et je supposai que ces bactéries pouvaient passer à un état difficilement visible. Il faut convenir pourtant que certains phénomènes observés au cours de la maladie de gomme, phénomènes sur lesquels je reviendrai plus loin, s'expliquent mal par cette hypothèse bactérienne. Aussi, au bout de quelque temps, je reconnus que cette présomption était tout à fait inexacte; mais, en attendant, elle m'avait conduit à entreprendre une série d'expériences d'inoculation avec des parcelles de gomme, expériences qui m'apprirent, en premier lieu, que la maladie de gomme est éminemment contagieuse et facile à provoquer artificiellement; en second lieu, que des fragments de gomme chauffés ou bouillis pendant longtemps perdent leur pouvoir d'infection, de sorte qu'il restait peu de doute concernant le fait qu'un organisme vivant devait être impliqué dans la contagion. Après avoir poursuivi mes expériences, dans les circonstances les plus diverses, pendant plus d'un an, je réussis enfin à établir avec certitude la vraie nature du contage de la maladie de gomme.

Je trouvai, en effet, que la virulence n'appartient qu'aux fragments de gomme qui renferment les spores d'un certain Champignon d'une organisation relativement élevée, appartenant à la classe des Ascomycètes, et que ces spores, même quand on les introduit séparément, c'est-à-dire non enveloppées de gomme, sous l'écorce des Amygdalées, donnent lieu à des phénomènes pathologiques remarquables et, par un mode d'infection spécifique, produisent toujours sûrement une affection gommeuse locale.

N'ayant pas réussi à déterminer ce Champignon, je pris la liberté, lorsque je fus suffisamment initié aux particularités de la vie de ma plante, de demander des éclaircisement ultérieurs à M. le professeur C. A. J. A. Oudemans; celui-ci reconnut immédiatement le parasite pour une espèce nouvelle de *Coryneum*, espèce à laquelle il m'a fait l'honneur de donner mon nom.

Une fois bien familiarisé avec les différentes formes sous lesquelles se présente le parasite de la maladie de gomme des Amygdalées, je soumis à un examen attentif la gomme arabique. J'étais intimement convaincu que ce produit doit se trouver, tout comme la gomme des Amygdalées, sous l'influence d'un parasite, et mon attente à cet égard n'a pas été trompée. Dans des morceaux de gomme, encore agglutinés avec des fragments de branches d'Acacia, j'ai en effet rencontré un Champignon qui sous tous les rapports essentiels ressemblait au *Coryneum Beyerinckii*, et auquel M. Oudemans imposa d'abord le nom de *Coryneum gummiparum*. Plus tard, lorsque de nouvelles études eurent fait connaître aussi les autres phases du développement de cet Ascomycète, ce nom dut être remplacé par celui de *Pleospora gummipara*, espèce à laquelle le *Coryneum* ressortit comme état conidien. On ne saurait douter que ce parasite soit la cause de la maladie de gomme des Acacias, et je regarde aujourd'hui comme certain que la gomme arabique pourra être produite à volonté, par infection artificielle.

En passant, je noterai ici que, guidé par la même suite d'idées, j'ai essayé, sur des pommiers et des poiriers, de provoquer artificiellement, par voie d'inoculation, la maladie si redoutée du „chancre"; ce résultat toutefois n'a pu être obtenu, de sorte que la maladie en question ne paraît pas être contagieuse, et certainement n'est pas due à des bactéries.

Pendant l'exécution, à l'intérieur de l'appartement, de nombreuses expériences d'inoculation de la gomme sur des rameaux

coupés, j'observai que, au voisinage des points où les parcelles de gomme avec spores vivantes de *Coryneum* avaient été introduites sous l'écorce, les tissus de la plante changeaient de couleur, devenaient généralement bruns, puis finissaient par se nécroser. Les taches ainsi produites avaient un aspect caractéristique, comme détrempé, et pour expliquer leur formation on devait admettre qu'un liquide de nature très spéciale découle de la gomme et attaque les tissus de la plante. Ce liquide, je le désignerai sous le nom de ferment de Coryneum.

Enfin, lors de l'infection, à l'air libre et à la lumière, de branches vertes de pêcher, je reconnus que les taches dont il vient d'être question, longtemps avant de brunir et de se nécroser, prennent une couleur rouge intense, par suite de l'apparition d'un pigment rouge dans le suc cellulaire. Cette observation m'a conduit à rassembler quelques faits relativement au pigment rouge en général; les résultats de cette étude, que je ne crois pas tout à fait dépourvus d'intérêt, seront communiqués dans un autre Mémoire.

Reprenant maintenant en détail les divers sujets ci-dessus indiqués, je vais décrire successivement mes expériences d'inoculation, le parasite de la maladie de gomme des Amygdalées, les phénomènes de la maladie de gomme et le parasite de la gomme arabique.

Auparavant, toutefois, je dois témoigner ma vive reconnaissance à M. le professeur Oudemans, pour l'intérêt qu'il a bien voulu prendre à mes recherches et pour le secours qu'il m'a prêté. Non seulement j'ai obtenu de lui toutes sortes de renseignements concernant les parasites gommipares, mais il a mis tant d'empressement à rédiger les descriptions détaillées, que j'ai encore pu en enrichir le présent travail.

I. EXPÉRIENCES D'INOCULATION.

Expériences d'inoculation avec la gomme de pêcher sur des branches de pêcher.

Les arbres qui ont servi à ces expériences, de même qu'à toutes les suivantes, se trouvaient dans trois jardins différents, le mien, celui de l'Ecole d'agriculture et celui de M. F. C. Koker; je profite de cette occasion pour remercier M. Koker de l'appui qu'il m'a fourni en mettant libéralement ses arbres à ma disposition.

En février 1882, je pratiquai dans l'écorce d'un long rameau de prolongement, âgé de un et deux ans, d'un pêcher franc qui jusqu'alors n'avait jamais montré la moindre trace de gomme, une douzaine d'incisions, de la même forme que celles destinées à la greffe en écusson. Au voisinage de ces incisions il était facile de soulever un peu l'écorce, de façon que je pus introduire sous elle de petits fragments de gomme, pris sur un rameau de pêcher affecté de la maladie gommeuse. Le résultat fut que toutes les plaies ainsi traitées furent violemment attaquées de la maladie, de sorte qu'au mois de mai on y voyait des masses de gomme d'un volume très considérable. Après avoir continué pendant près d'une année à exsuder de la gomme, la plupart de ces plaies ont commencé à guérir spontanément. Comme moyen de contrôle, j'avais pratiqué dans une branche voisine une série d'incisions exactement pareilles, mais qui ne reçurent pas de gomme; toutes ces plaies, sans exception, sont restées parfaitement normales et ont bientôt été fermées complètement par du cal sain.

Dans mes expériences postérieures, j'ai procédé d'une manière un peu différente: d'une série de plaies, faites sur une seule et même branche, les unes, de deux en deux, furent infectées avec de la gomme, les autres, intermédiaires, ne le furent pas; en opérant ainsi, j'étais assuré que toutes les plaies se trouvaient dans des conditions physiologiques semblables,

assurance qu'on n'a pas, au même degré, quand les plaies sont réparties sur des branches différentes. Une légère modification a aussi été apportée à la forme des plaies: au lieu de l'incision de la greffe en écusson, j'ai pratiqué une simple incision longitudinale; l'écorce se laisse alors soulever encore suffisamment pour qu'on puisse glisser en dessous une parcelle de gomme ou des spores de *Coryneum*, et la plaie elle-même est moins grave, guérit plus rapidement et est moins exposée à l'infection spontanée.

Avec ce nouveau mode d'expérimentation, il est encore arrivé, en général, que les plaies inoculées ont seules contracté la maladie de gomme, tandis que les autres ont guéri normalement. Pour obtenir ce résultat, il faut toutefois que les plaies ne soient pas trop rapprochées, car la maladie de gomme passe très facilement de l'une à l'autre: l'eau de pluie surtout, en coulant le long de la branche, donne lieu au transport de la gomme de plaie en plaie, et, en outre, la maladie elle-même se propage dans toutes les directions à travers le tissu de la branche. Ordinairement, à la vérité, cette infection secondaire se laisse assez facilement distinguer de l'infection primaire, de sorte que le résultat essentiel de l'expérience est rarement douteux.

Des expériences semblables à celles ci-dessus décrites ont été exécutées plus tard, à une plus grande échelle, sur trois autres pêchers, et toujours j'ai obtenu le résultat le moins équivoque, à savoir, que les plaies infectées avec des spores de *Coryneum* étaient attaquées par la maladie de gomme, ou, si le virus avait été introduit en trop grande quantité, que les branches blessées mouraient complètement, d'une mort prématurée. Un des arbres qui servirent à ces expériences était un nectarine, c'est-à-dire un pêcher à fruits lisses, mais, en ce qui concerne la maladie de gomme, cet arbre se comporte comme un pêcher ordinaire.

A l'origine, encore ignorant de la nature du contage, j'infectais simplement avec le premier morceau de gomme venu, que je détachais d'une branche de pêcher malade. Sans doute, d'une manière générale, le résultat de cette pratique était tel qu'on

ne pouvait douter que la gomme ne fût le véhicule du contage; néanmoins, il ressortait aussi de ces expériences qu'un nombre relativement assez grand de plaies restaient saines même après l'inoculation, tandis que les autres, qui avaient été inoculées avec des parcelles du *même morceau de gomme*, contractaient la maladie. Dès que je fus fixé sur ce point, j'abandonnai l'hypothèse que la gomme pouvait être du mucilage de bactéries avec „bactéries invisibles", et désormais, avant de faire une expérience, j'examinai au microscope les fragments de gomme que je voulais y employer.

Il va sans dire que la gomme peut renfermer toutes sortes de corps étrangers, qui y ont été apportés soit par le vent, soit par l'eau de pluie découlant le long des branches. Parmi les organismes vivants qui se rencontrent très fréquemment dans la gomme, on peut citer des bactéries et des cellules de levûre, des spores de différentes espèces de Champignons, des Algues inférieures et des grains de pollen des plantes les plus diverses. Dans la gomme exsudée de plaies superficielles un peu larges, on trouve *presque toujours* différentes formes de mycéliums et ordinairement aussi les spores du vrai parasite de la maladie gommeuse, le *Coryneum Beyerinckii.*

Toutefois, certaines parties d'un morceau quelconque de gomme, et même des parties très étendues, peuvent être entièrement pures d'organismes étrangers, en général, et de *Coryneum* en particulier. Avec ces parties limpides j'ai institué un grand nombre d'expériences d'inoculation, et la grande majorité des plaies inoculées sont restées normales, n'ont pas été attaquées par la maladie de gomme. La circonstance que, même en opérant ainsi, quelques-unes des plaies sont devenues gommenses, doit être attribuée à une infection spontanée par le milieu ambiant, ou à l'existence du virus en quelque point de la gomme employée, existence qui avait échappé à l'observation microscopique. Plus loin je reviendrai sur ce sujet, pour signaler une difficulté qui s'y est présentée.

Expériences d'inoculation sur d'autres arbres.

Dès que j'eus reconnu que la maladie de gomme peut être produite, chez le pêcher, par voie d'infection artificielle, la question de savoir si la maladie gommeuse du prunier, du cerisier et de l'abricotier est due à la même cause, m'inspira un vif intérêt. Des expériences d'inoculation m'apprirent que la gomme de pêcher est capable de provoquer la maladie de gomme chez toutes les espèces qui viennent d'être nommées; ceux des symptômes de la maladie qui sont caractéristiques pour chacun des arbres en question apparaissent alors distinctement, preuve qu'ils dépendent entièrement de la nature de l'arbre, et non de celle de la matière virulente.

Outre ces espèces, j'ai encore réussi à inoculer la maladie de gomme au pêcher-amandier (*Amygdalo-Persica*), au *Prunus Mahaleb* et au *Prunus Laurocerasus*. Je dois ajouter, toutefois, que les plaies inoculées du mahaleb et du laurier-cerise n'ont pas exsudé de gomme jusqu'ici; mais le succès d'une inoculation de *Coryneum* se reconnaît, beaucoup plus tôt que par le flux gommeux, à quelques autres symptômes, qui seront décrits spécialement ci-dessous. Cela s'applique même au pêcher, bien que, chez lui, l'écoulement de la gomme puisse déjà commencer quatre ou cinq jours après l'infection.

Des spores de *Coryneum*, ou de la gomme contenant du *Coryneum*, ayant été introduites sous l'écorce de *Rosa canina*, *Pyrus Malus*, *P. communis* [1]), *Weigelia rosea*, *Acer Negundo*, *Forsythia viridissima*, *Hydrangea japonica*, *Citrus Aurantium*, *Quercus pedunculata* et *Eleagnus hortensis*, les plaies guérirent toutes sans formation de gomme; pour le *Pyrus communis* et le *Rosa canina*, la guérison fut toutefois moins prompte qu'elle ne l'eût été si aucune introduction de gomme n'avait eu lieu; en

1) F. Meyen dit dans sa *Pflanzenpathologie*, Berlin, 1841, p. 233: „*Bei unserem Steinobst ist dieser Gummifluss fast ebenso gewöhnlich, wie bei den Astragalen. Er kommt aber, wenngleich verhältnissmässig nur sehr selten, auch bei unserem Kernobste vor*".

outre, chez la dernière espèce, une partie de l'écorce, au voisinage des plaies, prit une couleur rouge et plus tard mourut. Sur les branches de poirier, aux alentours des plaies, le *Coryneum* continua à vivre, peudant assez longtemps, sous la forme de *fumago*. La plupart de ces arbres et arbrisseaux ont été choisis uniquement parce qu'il se trouvaient dans une partie facilement accessible de mon jardin; l'*Eleagnus hortensis* fut soumis à l'expérience parce que d'autres espèces d'*Eleagnus*, par exemple *E. canadensis*, sont sujets à une forme de maladie gommeuse qui ressemble tout à fait à la gomme des arbres à fruits à noyaux [1]). Une raison analogue a dicté le choix du *Citrus Aurantium*: cet arbre aussi présente, dans le midi de l'Europe, une maladie de gomme, qui, suivant M. Briosi, paraît avoir un caractère contagieux et est probablement causée par un Champignon, auquel il a donné le nom de *Fusisporium limoni* [2]); j'ai trouvé, en outre, une indication [3]) d'après laquelle la „gomme des Indes orientales" proviendrait d'une Aurantiacée, le *Feronia elephantum* Correa; de cette gomme, toutefois, rien d'autre ne m'est connu.

Expériences d'inoculation avec la gomme de cerisier, de prunier et d'abricotier

Dans toutes les expériences ci-dessus décrites, l'inoculation a toujours été pratiquée avec de la gomme corynéifère ou des spores de *Coryneum*, prises sur des branches de pêcher. Par une autre série d'expériences j'ai trouvé que la gomme des cerisiers, griottiers, pruniers, abricotiers et pêchers-amandiers peut contenir la même espèce de *Coryneum* que la gomme du pêcher, et qu'avec cette gomme corynéifère il est possible d'infecter artificiellement des branches de pêcher; sans aucun

[1]) B. Frank, *Die Krankheiten der Pflanzen*, 1e Hälfte, p. 93, Breslau, 1880

[2]) G. Briosi, *Intorno al mal di gomma degli agrumi*, dans: *Mém. d. Cl. d. sc. fisici etc., Real Acad. d. Lincei*, Ser. 3, Vol. II, Roma 1877—78, Sep. p. 12. *Bot. Jahresbericht*, VI (1878), Abth. 1, p. 461. — Voir aussi, E. de Novellis, *Botan. Centralblatt*, I, 1880, p. 469.

[3]) *H. Baillon*, *Histoire des Plantes*, t. IV, Paris, 1873, p. 446.

doute, une pareille transmission s'opérera parfois aussi, spontanément, dans la nature. J'ai également réussi à communiquer la maladie à des branches d'abricotier au moyen de gomme de cerisier, et à des branches de prunier au moyen de gomme de pêcher-amandier. La preuve est ainsi fournie que les propriétés du parasite ne sont pas notablement modifiées par le fait de son existence sur des espèces végétales différentes. Cela n'empêche pas, toutefois, que les divers états de végétation du parasite, dans les diverses espèces de gommes en question, ne diffèreut tant soit peu quant à l'aspect extérieur. Il m'a paru inutile de donner plus d'extension à ce genre d'expériences.

La virulence des spores de Coryneum est-elle susceptible d'atténuation? Prédisposition des plantes nourricières aux maladies contagieuses.

Dans une de mes expériences, où de la gomme de griottier avait été transportée sur une branche de pêcher, les phénomènes d'infection s'étaient déclarés avec une rapidité et une violence extraordinaires, d'où je devais conclure que dans ce cas était intervenu un virus plus actif que celui de mes autres expériences. Il me parut intéressant d'étudier ce point de plus près, et, bien que les résultats obtenus ne soient pas complètement satisfaisants, je crois devoir décrire succinctement les expériences exécutées dans cette direction.

Pour abréger, un pêcher du jardin de M. Koker sera désigné par *A*, un second arbre parfaitement sain, de mon propre jardin, par *B*, et un troisième, du jardin de l'Ecole d'agriculture, par *C*. Le pêcher *A*, fortement malade, fournit, en février 1882, la gomme employée pour la première inoculution de *B* et de *C*. Au bout d'un an environ, les plaies gommeuses de *A* commencèrent à guérir spontanément, mais il y restait encore assez de gomme pour qu'on pût inoculer avec elle quelques autres branches de *B*, ainsi que des branches saines de *A* et de *C*. Cette opération ne produisit chez *B* même qu'une infection très faible, tandis que

les branches de *A* ne tardèrent pas à mourir et que celles de *C* furent attaquées assez vivement de la maladie. Or, comme l'arbre *B*, inoculé de nouveau, tant avec de la gomme de *A* qu'avec de la gomme de griottier, fut infecté violemment, le précédent résultat ne peut être attribué exclusivement à la réceptivité moindre de *B* pour la maladie de gomme; la seule explication qui reste, me semble-t-il, c'est d'admettre que le *Coryneum*, après avoir longtemps vécu sur l'arbre *B*, n'agissait plus sur lui avec la même force que lors de sa première arrivée ou lors de son transport sur un autre arbre. De cette manière, il devient compréhensible aussi pourquoi les plaies dans lesquelles, à la suite d'infection artificielle, la maladie de gomme s'est développée à un haut degré, finissent tôt ou tard par guérir d'elles-mêmes.

Pour les virus des maladies infectieuses des animaux, une règle analogue paraît être d'une application très générale: eux aussi paraissent s'atténuer après avoir longtemps vécu dans un même individu, et gagner en force lorsqu'on les transplante sur un autre sujet.

De nature un peu différente est une observation relative à la rouille du blé, sur laquelle M. C.-B. Plowright appelle l'attention dans les termes suivants: „Il y a une énorme différence dans la gravité du mal causé par la rouille, suivant qu'elle dérive directement de l'Epine-Vinette ou qu'elle provient de l'*Uredo* qui s'est reproduit lui-même durant plusieurs générations. Cela ressort à toute évidence du fait que l'*Uredo* se voit tous les ans, dans presque tous les champs de blé — sinon dans tous; mais le cultivateur ne s'en préoccupe nullement, vu que la récolte n'en est pas sensiblement diminuée. Pour la rouille, au contraire, qu'on rencontre au voisinage de buissons d'Epine-vinette, le cas est différent. Là, par l'énergie de sa croissance, le champignon nuit tellement au blé, que la plante ne peut plus produire qu'un petit nombre de grains épuisés. Le mycélium se développe et

1) *On the connection of the wheat Mildew with the Barberry*, dans *Gardener's Chronicle*, 1882, II, p.234.

fructifie avec tant de vigueur, aux dépens du blé, que souvent le chaume de celui-ci ne mûrit pas, mais meurt encore vert. C'est d'ailleurs à quoi l'on pouvait s'attendre, en considérant que l'œcidiospore est un produit sexuel, tandis que l'urédospore ne l'est pas".

Au point de vue théorique, les faits dont il vient d'être question s'accordent entre eux et nous apprennent que l'intensité de l'action d'un parasite augmente par certains changements apportés aux conditions dans lesquelles il vivait jusqu'alors.

Dans cette même direction j'ai encore fait quelques autres expériences, où deux cerisiers différents étaient soumis à l'infection réciproque et à l'auto-infection; les résultats furent toutefois trop douteux pour mériter d'être communiqués. Par contre, je dois dire un mot d'expériences d'inoculation avec de la gomme chauffée et bouillie. Dans quelques cas, une courte ébullition était suffisante pour rendre le *Coryneum* entièrement inerte et probablement le tuer. Dans d'autres cas, les parcelles de gomme bouillies occasionnèrent initialement les mêmes symptômes qui d'ordinaire annoncent une infection gommeuse bien réussie (symptômes sur lesquels je reviendrai plus loin). Après que ces phénomènes furent restés visibles durant plusieurs mois, sans qu'il se formât la moindre trace de gomme, les plaies entrèrent peu à peu en voie de guérison. Il est possible que la gomme, que je faisais bouillir avec de l'eau dans un tube à essai sur la flamme du gaz, n'ait pas été échauffée suffisamment dans toute sa masse et par suite n'ait pas été tuée; mais alors on peut supposer que la virulence des spores de *Coryneum* avait été atténuée par la chaleur. M. A. Chauveau [1]) ayant prouvé expérimentalement que la virulence du *Bacillus anthracis* est beaucoup affaiblie quand il a été soumis à une température de 42° C, puis de 47° C, la diminution du pouvoir infectant du *Coryneum*, à la suite de l'échauffement, n'avait à priori rien d'improbable. L'inoculation de spores de *Coryneum* à vitalité normale, dans

---

1) *Comptes rendus*, 1883, t. 96, p. 553.

des branches de laurier-cerise, donne lieu à des phénomènes qui ressemblent sous maints rapports aux résultats obtenus avec la gomme chauffée, notamment en ce qui concerne l'apparition du pigment rouge, plus tard la coloration en brun des bords des plaies et la non-production de gomme. Comme, dans ce cas, il me paraît possible que les phénomènes en question soient exclusivement dus à un ferment sécrété par le *Coryneum*, il me semble également concevable que dans les expériences avec la gomme bouillie j'avais bien tué le parasite, mais pas détruit complètement le ferment sécrété. Si cette dernière interprétation est la vraie, je n'aurais donc pas encore obtenu, par la chaleur, l'atténuation de la virulence des spores de *Coryneum*.

Des parcelles de gomme humide de cerisier, qui avaient été séchées environ ¼ d'heure sur des lames de verre dans une étuve à 56° C, ne déterminèrent pas, inoculées sur des branches saines de cerisier, la maladie de gomme. La couleur grise ou brune des branches de cerisier s'oppose toutefois à ce que les phénomènes d'infection précurseurs de la maladie gommeuse proprement dite, lesquels chez le pêcher surtout sont si distincts, puissent être observés, de sorte que je ne puis dire avec certitude si dans ce cas le *Coryneum* avait été complètement tué ou seulement affaibli; j'incline pour la première alternative.

Dans la pathologie végétale, c'est encore une question controversée que de savoir si des plantes nourricières déterminées peuvent, ou non, posséder une prédisposition aux maladies parasitaires. M. Hartig et M. Frank ne l'admettent pas, M. Sorauer [1]) au contraire en est pleinement convaincu.

Que tous les arbres de la même espèce et de la même variété n'offrent pas également prise à la maladie de gomme, c'est un fait certain; on ne sait pas au juste quelle est la source de cette différence, mais la cause occasionnelle directe est naturellement une inégalité du pouvoir de résistance. Or celle-ci revient, je crois, à une inégalité dans la force constitutionnelle du proto-

---

[1]) *Bot. Jahresbericht*, VI (1878), 2e Abth., 1882, p.1171.

plasma des différents individus, — et l'existence réelle d'une pareille inégalité a été mise hors de doute par les nombreux faits rassemblés par Darwin [1]). On ne saurait donc guère contester aujourd'hui la possibilité d'une prédisposition pour des maladies déterminées, due à la „constitution plus ou moins faible" d'individus végétaux déterminés.

A quel point les cultivateurs et botanistes anglais sont convaincus d'une prédisposition de la Pomme de terre pour la maladie de cette plante, indépendamment de l'influence des conditions de culture, c'est ce que montre le passage suivant [2]): „Les déclarations des cultivateurs mènent à la conclusion que chaque espèce, obtenue de semis, a besoin de quatre à six ans pour arriver à la fixité, que souvent alors elle est sans valeur, mais que, si elle fournit une pomme de terre de bonne qualité, celle-ci s'améliore de plus en plus par la culture. Au bout de quelque temps, toutefois, disparaît toute immunité relative qu'initialement elle aurait pu avoir pour la maladie. Tous les témoins ont vanté le grand pouvoir de résistance à la maladie qu'a jusqu'ici manifesté la pomme de terre Champion, mais ils ont prévenu la Commission que la Champion aussi succomberait sans doute à son tour".

Selon les praticiens anglais, la pomme de terre Champion, après s'être „suffisamment éloignée de la semence", acquerra donc une prédisposition à la maladie. — On pourrait demander, avec quelque raison, si le *Phytophtora infestans*, qui lui aussi se reproduit continuellement par voie asexuelle, ne doit pas subir un changement analogue à celui de la pomme de terre Champion? Peut-être cela a-t-il effectivement lieu, mais avec une vitesse différente et dans une direction un peu différente; il est certain,

---

[1]) *The Variation of Animals and Plants under Domestication*, 2e éd., 1875, t. II, Ch. XXIII et XXIV. *Cross and Selffertilization of Plants*, Londres, 1876.

[2]) Rapport présenté par une Commission parlementaire d'enquête, en Angleterre, au sujet de la maladie de la pomme de terre et des moyens de la combattre, p. 6, 9 juill. 1880.

au moins, que dans les dernières années humides la maladie a été beaucoup moins intense qu'on n'aurait pu l'attendre d'après l'expérience antérieure. Mais la manière de vivre du *Phytophtora infestans* n'est pas encore élucidée dans toutes ses particularités, de sorte qu'il serait hasardé d'émettre à cet égard des conjectures déterminées.

Expériences d'inoculation avec différentes substances.

Les changements remarquables qui s'observent lorsque la gomme attaque les branches des Amygdalées sont de nature telle qu'on ne s'attendrait certainement pas, si cela n'avait été mis en évidence par les expériences ci-dessus décrites, à ce qu'ils puissent être provoqués par le mycélium d'un Champignon. J'ai donc jugé nécessaire de m'assurer, par des expériences spéciales, si des corps étrangers, autres que des fragments de gomme avec spores de *Coryneum*, pourraient également occasionner, par inoculation, la maladie gommeuse. A cet effet, j'ai employé en premier lieu de petits morceaux de bois de pêcher enlevés à des branches saines, et je les ai glissés sous l'écorce de pêchers et de cerisiers. En second lieu, j'ai opéré avec des fragments de bois mort de pêcher, où au microscope je n'avais pas rencontré de filaments mycéliens, et j'ai introduit ces fragments dans de jeunes branches de pêcher. En troisième lieu, j'ai inoculé de jeunes branches de cerisier et de pêcher avec le cambium gommeux et le phloème gommeux d'un cerisier, où l'examen microscopique ne m'avait pas non plus fait découvrir des filaments de mycélium. Toutes ces expériences furent exécutées en avril 1882; aucune d'elles n'a entraîné la maladie de gomme. Il est inutile d'insister sur celles qui ont eu lieu avec des objets morts, elles sont assez explicites; mais quelques remarques doivent être faites au sujet des inoculations avec des tissus affectés de gomme. Les expériences de cette sorte me paraisent avoir de l'intérêt, en ce qu'elles fournissent la preuve que le contact d'un tissu sain avec un tissu malade ne suffit

pas, à lui seul, pour que le premier contracte la maladie de gomme; dans l'appréciation de ce résultat, il ne faut toutefois pas perdre de vue que le tissu malade, employé pour l'inoculation, à dû mourir très promptement. On ne peut donc rien en conclure quant à la question de savoir si les tissus malades, dans la plante vivante, possèdent ou non la propriété de sécréter une matière morbifique liquide, qui s'infiltre dans les tissus sains et leur communique la maladie. Je crois que, pour résoudre cette question, il n'y aurait d'autre moyen que de prendre des rameaux fortement attaqués de la gomme, mais ne contenant pas de mycélium de *Coryneum*, — en tant que j'ose me fier à l'exactitude de mes propres recherches microscopiques, de pareils rameaux peuvent réellement être trouvés, — et de les greffer sur un substratum sain. Si ce substratum devenait malade de la gomme, on pourrait inférer sûrement qu'une matière morbifique y a pénétré, probablement à l'état liquide. Le mycélium de *Coryneum* ne serait alors évidemment pas impliqué, d'une manière directe, dans le phénomène. Les grandes difficultés attachées à ce mode opératoire [1]) m'ont jusqu'ici retenu d'en faire l'essai, bien que j'incline à croire qu'on réussirait effectivement à transmettre ainsi la maladie à un sujet sain, et il ne me semble pas inadmissible que le parenchyme malade, — par exemple, dans la formation des canaux gommifères, — soit susceptible de s'étendre par suite d'une action contagieuse des cellules malades sur les cellules saines.

Dans les inoculations dont nous venons de parler, il a été fait usage de matières mortes, ou de tissus qui certainement sont morts très peu de temps après l'institution de l'expérience. Il reste donc à savoir si la présence, sous l'écorce, de n'importe quels organismes étrangers vivants produit, en général, la maladie de gomme. Assurément, par toutes sortes de raisons,

1) Décider si un rameau malade contient ou non du mycélium de Coryneum ne paraît guère possible autrement que par la destruction complète du rameau, et, même alors, il est difficile d'arriver à une certitude parfaite. Les caractères extérieurs sont, sous ce rapport, très trompeurs.

cela était improbable à priori; mais, en outre, des expériences directes m'ont appris que le *Cladosporium herbarum*, — emprunté d'abord à des chaumes de blé attaqués de la „carie", ensuite à des feuilles d'avoine mourantes, — est complètement inactif dans l'écorce du pêcher. J'ai choisi ce Champignon parce que le *Coryneum* peut se présenter à l'état de *Cladospòrium*. — M. Drawiel [1]), de son côté, a inoculé des branches de cerisier avec le *Polyporus igniarius*, dans le dessein de provoquer la maladie de gomme; cette expérience aussi est restée sans résultat. Finalement, je mentionnerai encore l'expérience suivante.

Lorsque j'eus reconnu que l'activité de la gomme dépend de la présence d'un organisme vivant, mon attention ne se porta pas d'abord sur le *Coryneum*, mais sur une petite moisissure blanche, une espèce de *Fusisporium*, à ce que je crois, qui sort sous la forme de coussinets blancs de l'écorce de branches malades d'Amygdalées quand ces branches sont conservées dans un espace humide, et dont les spores sont très communes dans la gomme, surtout dans celle du prunier. Inoculé, toutefois, ce Gymnomycète se montra complètement inactif.

Pour l'apparition de la maladie de gomme, les propriétés du *Coryneum Beyerinckii* sont donc nécessaires.

L'observation suivante ne paraît pas cadrer tout à fait avec ce que nous avons vu jusqu'ici. En août 1882, j'examinai au microscope, sans pouvoir y découvrir la moindre trace de mycélium, un rameau de pêcher, très fortement attaqué de la gomme et dans lequel, par suite, il s'était formé une multitude de „canaux gommifères". J'enlevai avec précaution l'écorce, parce qu'il était à craindre que des organismes étrangers, peut-être des spores de *Coryneum*, pussent y adhérer; de cette manière, je retins seulement le petit cylindre ligneux avec les canaux gommifères à sa surface. De ce cylindre j'ai coupé avec un rasoir des lamelles presque assez minces pour servir d'objets

[1]) *Botanisches Centralblatt*, I, 1880, p.533.

microscopiques et, en septembre 1882, j'ai inoculé ces lamelles dans une demi-douzaine de plaies faites à des branches de pêcher saines. A ma grande surprise, toutes ces plaies se sont mises à gommer au mois de mai 1883, après avoir présenté en hiver les symptômes précurseurs ordinaires de la maladie de gomme. Comme, dans ce cas, je n'avais aucune raison de croire à une infection spontanée, il me paraît probable que le tissu du rameau avait contenu çà et là des filaments de *Coryneum*, ne se laissant pas distinguer, au microscope, du tissu de la plante.

II. CORYNEUM BEYERINCKII,

LE PARASITE DE LA MALADIE DE GOMME DES AMYGDALÉES.

M. le professeur Oudemans a donné de ce parasite une description exacte [1]), que je reproduis ici, traduite du latin:

„Les pulvinules de *Coryneum* ont un diamètre de $\frac{1}{15}$—$\frac{1}{20}$ millim. et consistent en un stroma parenchymateux brun clair, duquel s'élèvent, serrées les unes contre les autres, de nombreuses conidies brièvement stipitées, en général quadricellulaires, qui dans l'eau pure ou gommeuse germent promptement. Le premier filament germinatif naît ordinairement de la cellule apicale, puis viennent la deuxième, la troisième et la quatrième cellule, de sorte que souvent on peut trouver quatre filaments germinatifs à chaque conidie. Les filaments germinatifs produisent des cellules à forme de Levûre, qui se séparent l'une de l'autre, ou des filaments mycéliaux bruns à parois épaisses, multicellulaires, dont se détachent, au bout d'un temps plus ou moins long, les conidies bien connues, 2- ou 3-cellulaires, du *Cladosporium* et aussi parfois des conidies de *Macrosporium*, plus grosses et plus ou moins distinctement muriformes. La formation du *Coryneum* ne paraît pas avoir lieu sur les filaments germinatifs immergés dans l'eau.

---

1) *Hedwigia*, 5 Sept. 1883, N°. 8.

„Les pédicelles des conidies de *Coryneum* sont ordinairement aussi longs que les conidies elles-mêmes (21—32 μ), larges de 2—3μ, incolores, unicellulaires, cylindriques ou un peu renflés par le bas. Rarement ils sont allongés et alors divisés par plusieurs cloisons. Parfois, ces pédicelles s'accolent entre eux.

„Les conidies sont en forme de barillet étroit, ou oblongues-obovées, longues de 28—32 μ, larges de 11—13 μ dans la partie la plus épaisse, et ordinairement partagées par 3 cloisons en 4 cellules. Les cloisons sont à peu près également espacées, ou bien les deux cloisons extrêmes se rapprochent des pôles, d'où résultent, dans le premier cas, quatre cellules égales, dans le second, deux cellules moyennes plus grandes et deux cellules extrêmes plus petites. La couleur des cellules est ou bien la même chez toutes, olivâtre clair, ou bien elle est plus pâle chez les cellules supérieure et inférieure. Au niveau des cloisons, il y a des étranglements peu profonds. Dans les pulvinules on voit çà et là des conidies à 2, 3 et 5 cellules, et partout de jeunes cellules-mères de conidies, non cloisonnées.

„Tout autour des petits amas de *Coryneum* se trouvent des plantules imparfaitement développées, soudées latéralement entre elles et dont l'ensemble forme une espèce de petite coupe. Les paraphyses manquent."

Comme il est avéré que plusieurs espèces de *Coryneum* sont des états conidiens de Pyrénomycètes, — telle est, par exemple, la relation entre le *Coryneum disciforme* et le *Melanconis lanciformis*, qui se trouvent tous les deux sur les branches sèches du bouleau, — on peut admettre qu'il en est de même, ou qu'il en a été de même phylogénétiquement, pour les autres espèces de *Coryneum*. Les fruits ascoïdes du *C. Beyerinckii* ayant échappé jusqu'ici à toutes les recherches, il se peut donc, ou bien que ce degré de développement n'apparaisse que rarement, dans des conditions spéciales et encore inconnues, ou bien que les dernières traces en aient disparu, tandis que les ancêtres de la plante possédèrent un jour des asques.

Les Corynéacés sont rapportés au groupe artificiel des Gymno-

mycètes de Fries. Les Gymnomycètes sont caractérisés d'une manière générale par un stroma parenchymateux, dont toute la surface, ou seulement la face supérieure, donne naissance, sur des filaments simples ou ramifiés, à des conidies isolées ou unies en chapelets. Les Corynéacés portent directement sur le stroma celluleux les conidies sessiles; parfois, une cellule pédicellaire, d'une forme un peu différenciée, constitue le passage entre le stroma et les spores. Dans le genre *Coryneum*, le stroma perce sous la forme de coussinet l'écorce de branches mortes ou vivantes; il est de couleur brune et porte des spores également colorées en brun foncé ou en brun-grisâtre, pédicellées ou sessiles.

Le *Coryneum Beyerinckii* (*a*, fig. 1, Pl. II) possède, ainsi qu'il a été dit ci-dessus, des spores conidiennes quadricellulaires, claviformes, brunes, à parois épaisses, ayant de 28—32 et même jusqu'à 40 μ de longueur; chacune des quatre cellules germe très rapidement dans la gomme, dans l'eau sucrée ou sous l'écorce du pêcher, et émet alors des filaments multicellulaires, brun clair, riches en protoplasma (fig. 2). En *a*, fig. 1, on voit trois de ces spores déjà en germination, quoique encore unies au stroma. Les filaments germinatifs se développent dans la gomme en un mycélium brun clair, qui produit, surtout dans la gomme du pêcher-amandier et du prunier, beaucoup de conidies de *Cladosporium*, bi- ou tricellulaires, lesquelles peuvent de même germer directement. Les stromas chargés de conidies sont situés, dans le cas d'infection artificielle, au bord des plaies gommeuses, sous la gomme, à la surface de l'écorce et spécialement sur le callus traumatique qui s'est formé à la suite de la lésion. C'est en mai et juin qu'on trouve les plus beaux pulvinules, et c'est aussi dans ces mois que les branches auxquelles on a inoculé des spores commencent le plus vite à excréter de la gomme.

Le mycélium végétatif de ce Champignon peut se présenter sous des formes très diverses; selon toute probabilité, ces formes dépendent de la nature et de la quantité des aliments disponibles, de l'accès plus ou moins facile de l'oxygène, de l'âge

du parasite et de la saison. Outre le mycélium normal, à parois minces, brun clair ou incolore, multicellulaire, qui vit en parasite dans l'écorce vivante des Amygdalées et dans la gomme riche en matières nutritives, les principales formes de mycélium sont les suivantes. D'abord *l'état de Fumago* (*c*, fig. 1, Pl. II). C'est un mycélium à parois épaisses, pseudo-parenchymateux, brun foncé, ressemblant au stroma conidifère, et qu'on trouve tout l'été dans les plaies gommeuses. Chacune de ses cellules est apte à la division et peut ainsi se développer en un filament celluleux. Dans des circonstances déterminées, ces filaments celluleux peuvent devenir très déliés et à parois très minces, ils perdent alors en même temps leur couleur et prennent l'aspect de fins filaments de moisissure; de pareils filaments minces sont très sujets à la métamorphose en gomme. Dans d'autres cas, les cellules qui naissent de la division du mycélium fumagiforme acquièrent, à la vérité, des parois minces, mais elles ne s'allongent pas, et au bout de quelque temps on les voit se désagréger et passer ainsi à l'état de levûre. Tout cela est indiqué en *c*, fig. 1.

En *e*, fig. 1, est représenté un passage entre le mycélium normal et la forme fumagienne, auquel on peut appliquer avec quelque droit le nom d'*état de Chroolepus*. Chaque cellule est à parois épaisses et renferme un, deux ou plusieurs corps transparents, qui ressemblent un peu à des gouttelettes de graisse et sont probablement analogues aux inclusions que M. F. Schmitz, chez d'autres plantes inférieures, a nommées „pyrénoïdes"; les cellules sont souvent unies deux à deux, de manière qu'aucune séparation nette ne se distingue plus dans la cloison entre les deux cellules de chaque couple. Parfois on voit germer les cellules, qui alors ou bien se développent en filaments mycéliaux, ou bien, comme le montre la fig. 1, *e*, produisent des sporidies à forme mycodermique, lesquelles sont susceptibles de se multiplier directement, par voie de bourgeonnement; ces sporidies aussi peuvent être envisagées comme un état de levûre du mycélium.

Dans ce qui précède, nous avons déjà appris à connaître deux origines différentes de la troisième forme que peut prendre le mycélium du *Coryneum*, la *forme de levûre.* En *d*, fig. 1, est représentée la levûre de *Coryneum*, telle qu'on la rencontre, surtout en hiver, sur les tissus vivants de branches de pêcher, dans les plaies gommipares; on voit aussi, dans cette figure, un filament mycélien à parois très minces, qui se désagrège en cellules de levûre. C'est à M. A. de Bary [1]) qu'est proprement due la découverte du fait que les Champignons supérieurs peuvent produire, lors de leur germination, des proliférations en forme de levûre (*hefeartige Sprossungen*). M. W. Zopf, dans un remarquable Mémoire, *Die Conidienfrüchte von Fumago* [2]), a montré que la levûre de Fumago peut passer directement à l'état de Mycoderme. En étudiant le *Fumago salicina*, il a observé que la formation des bourgeons a toujours lieu aux extrémités de l'axe longitudinal des cellules, de sorte que le système entier, supposé à l'état de liaison, représente un filament celluleux simple ou ramifié; il dit, en outre, que les cellules, après de fréquentes ramifications, deviennent de plus en plus petites. Dernièrement, M. O. Brefeld [3]) a constaté que les sporidies qui prennent naissance dans la germination des Ustilaginées peuvent se multiplier indéfiniment, tout comme les cellules du *Saccharomyces.*

Il n'est pas douteux que la faculté de prendre la forme de levûre existe chez une multitude de Champignons; aux nombreuses espèces qu'ont mentionnées les auteurs cités ci-dessus, je puis encore ajouter le *Cladosporium herbarum*, vivant sur les feuilles du maïs, et, d'après les figures de M. H. Bauke [4]), le

---

1) *Morphologie und Physiologie der Pilze*, *Flechten und Myxomyceten*, Leipzig, 1866, p. 181. Voir aussi: Löw, dans les *Jahrbücher* de Pringsheim VI, p. 46.

2) *Nova Acta*, t. XL, 1878, p. 295.

3) *Botanische Untersuchungen über Hefenpilze*, Heft V. *Die Brandpilze*, Leipzig, 1883.

4) *Beiträge zur Kenntniss der Pycniden*, dans *Nova Acta*, t. 38, p. 443, Dresden, 1876; pl. XXVIII, fig. 12.

Cucurbitaria elongata est très probablement dans le même cas. Quant à une action de ferment, on n'en a d'ailleurs encore rien constaté chez tous ces états, morphologiquement analogues à la levûre de bière, des Champignons supérieurs.

Je dois maintenant mentionner encore une espèce particulière d'organes de fructification, qui se forme de temps en temps chez le *Coryneum Beyerinckii.* Plus haut, nous avons vu que les branches fortement gommeuses du pêcher donnent naissance à des rameaux latéraux, qui peuvent être traversés de canaux gommifères. La fig. 3 montre la coupe horizontale d'un pareil rameau latéral. Les canaux gommifères se trouvent tant dans le bois que dans le phloème et se laissent poursuivre jusqu'au sommet mort du rameau. Tout en jugeant possible que de semblables rameaux aient été, dès leur première origine, infectés de mycélium de *Coryneum*, qui se serait développé avec eux, de même que le *Phytophtora infestans* se développe dans la fane de la Pomme de terre, je dois reconnaître que je n'ai pas toujours été en état, à beaucoup près, de découvrir ce mycélium. L'observation suivante plaide toutefois en faveur de son existence. Il n'est pas rare de voir tôt ou tard apparaître sur ces rameaux malades de petites taches rouge de feu; en ces points, le tissu ne tarde pas à mourir, et il se forme ainsi une petite éminence ou une fossette colorée en gris ou en brun, qui est entourée d'une bordure rouge; sous le tissu nécrosé (*a w*, fig. 3) se trouve une mince couche de liège *k l*. Si l'on examine ces taches au microscope, on y voit au centre un pulvinule de *Coryneum* (*c k*, fig. 3), qui toutefois n'est pas recouvert d'une couche de gomme, et dont les spores (*b*, fig. 1) sont ordinairement portées sur un long pédicelle et unicellulaires; çà et là on trouve pourtant, entre les spores anormales, des spores pluricellulaires plus ou moins normales; le stroma de ces pulvinules est semblable à celui des coussinets formés sous la gomme. Le tout rappelle un peu les *Cladosporium* et *Macrosporium*, mais les sporophores sont beaucoup plus serrés. Je regarde comme probable que cette „forme aérienne" des fruits conidiens du *Coryneum* naît d'un

mycélium caché dans le rameau, et non de spores qui auraient été apportées par le vent, ou de toute autre manière, à la surface du rameau, où elles auraient germé.

J'ai fait beaucoup d'expériences pour arriver à la certitude en ce qui concerne le pouvoir infectant de l'état de fumago et de l'état de levûre, ainsi que des spores aériennes du *Coryneum*. Ces dernières et les cellules de levûre n'ont jamais, dans mes inoculations, donné lieu à des plaies gommeuses, de sorte que je les tiens pour non virulentes. A l'égard de l'état de fumago, je suis resté dans le doute, n'ayant pas réussi à isoler des fragments de gomme, propres à l'inoculation, au sujet desquels je fusse convaincu qu'ils ne contenaient pas de spores de *Coryneum*. Les expériences en question ne peuvent donc pas encore être regardées comme décisives.

III. SYMPTÔMES DE LA MALADIE DE GOMME.

Bien que les phénomènes de la maladie de gomme aient été parfaitement décrits par MM. Trécul, Wigand, Prillieux, Frank et Sorauer, il ne me paraît pas superflu de revenir ici sur quelques-uns des symptômes les plus remarquables, en les considérant au point de vue de la contagiosité du mal, laquelle était ignorée des savants qui viennent d'être nommés. J'ai, en outre, à faire connaître quelques particularités non encore décrites, que je sache, et auxquelles j'ai été rendu attentif en étudiant surtout le pêcher, tandis que mes prédécesseurs avaient porté leur attention principalement sur le cerisier.

La mort comme résultat de l'infection par le Coryneum.

La sensibilité des Amygdalées à l'infection par le *Coryneum* n'est pas la même à toutes les époques de l'année. La formation de la gomme a lieu le *plus rapidement* lorsque l'inoculation est pratiquée aux mois de juin et de juillet: il n'est pas rare alors de voir s'écouler déjà les premières gouttes de gomme au bout

de deux ou trois jours. Cela ne s'applique toutefois qu'au pêcher et à l'abricotier; chez le prunier et le cerisier, il se passe plus de temps avant que l'exsudation de gomme ne commence. Mais les suites les plus *graves* s'observent quand l'inoculation a lieu en hiver ou au premier printemps. Si l'on emploie alors d'un seul coup une très grande quantité de spores de *Coryneum*, ou si les plaies infectées sont très rapprochées les unes des autres, la branche entière meurt, parfois en quelques semaines. Souvent une seule plaie, où l'on a introduit de la gomme, suffit pour faire périr une branche; lorsque celle-ci n'est pas très grosse, il peut aisément arriver que d'abord l'écorce, à partir de la plaie, meure tout autour de la branche, après quoi le bois meurt bientôt à son tour: la partie supérieure, non infectée, de la branche ne tarde alors pas à se dessécher, par suite du manque d'eau. Cette mortification de branches, sous l'influence du *Coryneum*, a été observée chez toutes les Amygdalées sur lesquelles j'ai expérimenté.

Si des branches coupées sont placées dans une enceinte humide, et qu'on observe attentivement les phénomènes succédant à l'inoculation, on voit d'abord, à partir du point infecté, s'étendre dans tous les sens une coloration brune, laquelle doit sans aucun doute être attribuée à un liquide qui imbibe les tissus et qui me semble ne pouvoir provenir que du mycélium du *Coryneum*. Il ne saurait être question ici d'une action directe du mycélium, car la coloration en brun s'observe dans toutes les cellules, et les filaments mycéliaux manquent alors encore complètement dans le tissu qui change de couleur, ou bien ils commencent seulement à y pénétrer.

Pour beaucoup d'autres maladies parasitaires des plantes on est arrivé à une conclusion analogue, et M. R. Hartig applique aux matières sécrétées par les parasites le nom de ferments. „Les actions", dit-il [1]), „que les parasites exercent sur les tissus des plantes nourricières, ne se laissent expliquer qu'en admettant

[1]) *Lehrbuch der Baumkrankheiten*, Berlin, 1882, p. 37.

pour chaque espèce de Champignon l'existence d'un ferment particulier, qui, formé dans le plasma fongique, est excrété par les hyphes et se communique aux cellules voisines".

Les branches mortifiées ne présentent aucune trace de formation de gomme, de sorte que cette formation est en rapport avec l'état vivant des organismes impliqués.

Quand l'infection artificielle avec de la gomme est pratiquée sur des troncs épais, — j'ai expérimenté, au mois de mars, sur des pruniers qui avaient atteint la grosseur du bras, — le ferment ne peut pas s'étendre tout autour du tronc et la mortification des tissus reste localisée; comme, au point infecté, l'accroissement en épaisseur s'arrête, un aplatissement s'y produit dans le cours de l'été; l'écorce, mortifiée en cet endroit, se détache et tombe plus tard. Même à la suite d'une infection légère, j'ai toujours vu mourir des parties de tissu plus ou moins étendues. Après cela, la formation de la gomme s'effectue, en général, au bord de la partie nécrosée.

En juillet 1882, j'ai insinué des parcelles de gomme de *Coryneum* dans des *pétioles* de cerisier. La plupart des feuilles commencèrent par se flétrir, mais cela peut avoir été l'effet de la lésion des faisceaux ligneux. Plus tard, une coloration brune s'étendit, à partir du point infecté, sur le pétiole et sur le limbe, évidemment par suite de l'action zymotique du *Coryneum*; en même temps, un grand nombre de ces feuilles tombèrent, après être devenues rouges dans les parties qui ne s'étaient pas colorées en brun. Finalement, toutes les feuilles sont tombées, en présentant les mêmes phénomènes, sans la moindre trace de formation de gomme.

Tout autre fut le résultat chez les feuilles d'abricotier, aux pétioles desquelles j'inoculai le *Coryneum* à la fin du mois de mai 1881. A la vérité, une légère coloration brune apparut au voisinage de la plaie, mais cette coloration resta localisée, et plus tard commença la production de gomme, de la même manière que dans les branches d'abricotier.

C'est ici le lieu de mentionner que des feuilles de pêcher, qui

ont été longtemps collées à des plaies gommeuses, deviennent ordinairement brunes et finissent par mourir.

Phénomènes extérieurs de la maladie de gomme chez le pêcher.

La couleur verte de l'écorce de ses branches rend le pêcher spécialement propre aux observations concernant la maladie de gomme.

Quand on introduit des spores de *Coryneum*, ou de la gomme à *Coryneum*, sous l'écorce verte de branches de pêcher âgées d'un an, on voit, comme premier symptôme de la maladie de gomme, apparaître une magnifique couleur rouge au voisinage immédiat du point infecté; ce phénomène tient à la formation d'un pigment rouge dans une ou plusieurs des trois assises de cellules collenchymateuses de l'écorce, qui se trouvent sous l'épiderme, en contact avec lui. Les cellules colorées en rouge meurent ordinairement au bout de peu de temps. Dans quelques cas, j'ai même observé cette rubéfaction, après l'inoculation du *Coryneum*, sur des branches de *Rosa canina*, mais, le plus souvent, l'influence infectante du *Coryneum* reste bornée, chez cet arbuste, à une coloration en brun, suivie de la mortification du bord de la plaie. Dernièrement, j'ai vu les jeunes scions verts du *Prunus Laurocerasus* devenir également d'un beau rouge autour des points infectés. Je dois ajouter que la coloration ne s'est manifestée distinctement que sous l'influence de la lumière, et qu'elle a toujours manqué dans les expériences faites en chambre, sur des branches coupées.

Le phénomène de la rubéfaction des branches de pêcher, avant le début de la maladie de gomme, est si frappant que, une fois l'attention éveillée, on peut aussi l'observer très facilement lors de l'infection spontanée, chez les arbres abandonnés à eux-mêmes. Des milliers de petites taches rouge carmin se voient souvent sur les branches vertes de pêchers atteints de la maladie de gomme. Au microscope, on trouve habituellement au centre de ces taches quelques filaments mycéliaux ou un

pulvinule rudimentaire de *Coryneum* (*c k*, fig. 3), semblable à la forme aérienne, ci-dessus décrite, des fruits conidiens qui se rencontrent sur les rameaux fortement malades de la gomme. Si toutes ces taches ne finissent pas par sécréter de la gomme (quelques-unes le font), cela tient à ce que sous le tissu attaqué par le *Coryneum* il se forme une petite couche de liège, d'où il résulte qu'ordinairement la petite tache meurt en entier et se détache de l'écorce, entraînant le *Coryneum*. Le ferment de *Coryneum* ne paraît pas attaquer le tissu subéreux, et c'est un fait bien connu que jamais le périderme des Amygdalées ne donne naissance à de la gomme; il ne paraît pas non plus que le mycélium soit en état de transpercer la petite couche de liège.

La rubéfaction des branches de pêcher, en cas de maladie de gomme, étant très apparente, je m'attendais à la trouver mentionnée dans les écrits spéciaux. Je n'ai toutefois rencontré à ce sujet qu'une seule observation, qui ne se distingue pas précisément par la clarté. Elle est due à M. C. F. W. Jessen [1]) et a été communiquée par lui, sous le titre „*Rotheln* (rouge)", dans les termes suivants: „De nombreuses observations m'ont convaincu que la maladie n'est autre chose que le flux gommeux". On ne doit pas oublier, d'ailleurs, qu'il existe chez le pêcher une maladie du „rouge", qui n'a rien à faire avec la maladie de la gomme. Il n'est peut-être pas superflu de donner ici une courte description de cette maladie, et je ne puis mieux faire que d'en emprunter les termes à M. A. Du Breuil [2]): „Le rouge est une maladie exclusivement propre au pêcher. Quelques variétés, notamment le *royal* et l'*admirable jaune*, y sont plus exposées que les autres. Les arbres qui en sont atteints présentent des rameaux qui se colorent d'abord en rouge vif, et bientôt en rouge foncé. Dès que cet accident se manifeste, la végétation s'arrête tout d'un coup et les arbres meurent presque instantanément, surtout lorsque la maladie apparaît au moment

---

1) *Verhandlungen der K. Leop. Car. Akad. der Naturf.*, t.XXV, Bonn,1855.

2) *Cours d'arboriculture*, 7e éd., partie II, Paris 1876, p. 453.

où ils sont chargés de fruits. Quelquefois cependant, ils languissent pendant une année ou deux; mais alors les fruits ne sont pas mangeables. On ne connaît aucun remède à cette maladie, dont on ignore jusqu'à présent la cause; aussi convient-il de remplacer immédiatement les arbres attaqués, sans chercher à vouloir les guérir". Le pêcher est un arbre qui par des causes très diverses, devant être considérées comme des conditions défavorables pour la vie des tissus ou des organes, montre une grande tendance à devenir rouge, même jusque dans le bois. C'est ainsi, par exemple, que M. Sorauer dit [1]: „Les pêchers greffés sur prunier croissent mal, leur bois se colore en rouge et bientôt ils dépérissent". Il n'y a donc guère lieu d'être surpris que cette coloration en rouge se produise aussi sous l'influence de l'infection par le *Coryneum*.

Après cette digression, je reprends la description des symptômes extérieurs de la maladie de gomme.

Une particularité qui se remarque surtout aux branches en apparence saines, de deux ans ou plus, d'arbres fortement atteints de la gomme, c'est l'augmentation en grandeur et aussi, à ce que je crois, en nombre des lenticelles. La cause de cette augmentation ne m'est pas apparue très clairement. Il ne saurait être question de la présence du mycélium du *Coryneum* sur toute la longueur de pareilles branches, et le phénomène ne peut probablement être attribué non plus au ferment du *Coryneum*, car, si ce ferment était en jeu, on devrait s'attendre à ce que la production de gomme, au lieu de rester bornée à un petit nombre de points, présentât un caractère plus général et s'étendît à tous les tissus vivants. Il serait concevable, pourtant, que le ferment de *Coryneum*, après avoir pénétré dans le protoplasma des cellules du pêcher, passât à un état latent, qu'il fît ainsi subir aux tissus un changement *léger*, et que plus tard seulement, dans des circonstances particulières, il provoquât la formation de gomme, ou même que cette formation fît com-

---

1) *Botanischer Jahresbericht*, VII, 1879, p.367.

plètement défaut. Les tissus ainsi modifiés devraient alors, aussi dans la genèse des lenticelles, s'écarter un peu de la règle normale.

Les jeunes rameaux verts appartenant à des branches fortement gommeuses ne possèdent pas encore de lenticelles, et ressemblent sous ce rapport aux rameaux parfaitement sains du même âge. C'est un fait bien connu que ces jeunes rameaux peuvent recevoir la maladie des branches-mères qui les portent, et je me figure, ou bien que, dès leur origine, le mycélium du *Coryneum* s'est développé avec eux et a pénétré leurs tissus en une foule de points, — de même que le mycélium du *Tilletia* et de l'*Ustilago* croît et s'élève avec le chaume du blé, — ou bien que, dès le premier moment, le ferment du *Coryneum* s'y est répandu de l'une ou l'autre manière. Dans quelques cas la première de ces hypothèses est la plus probable, dans d'autres, la seconde. A l'intérieur de ces rameaux on trouve ordinairement quelques vrais canaux gommifères, les uns dans le bois (*g k*, fig. 3), les autres dans le liber mou (*g p*). La surface des rameaux présente çà et là, comme nous l'avons déjà dit, de petites taches rouge de feu, dont le centre est occupé par une petite portion mortifiée et grisâtre de l'écorce, sur laquelle s'élève un pulvinule plus ou moins rudimentaire de *Coryneum*, semblable à un *Cladosporium* (*c k*, fig. 3). Les sommets de ces rameaux meurent ordinairement de bonne heure en été, et la mortification s'étend de haut en bas sur le rameau, dont le sommet devient noir. Dans les feuilles portées par de semblables rameaux se forment généralement un grand nombre de petites taches brunes, qui plus tard se changent en trous. Tous ces phénomènes s'expliquent le mieux, à ce qu'il me semble, en admettant que partout se trouve du mycélium de *Coryneum* ou du ferment de *Coryneum*. Dans l'écorce des rameaux, j'ai parfois, au microscope, observé directement ce mycélium, mais assez souvent aussi je l'ai cherché inutilement; à l'intérieur du rameau, je n'ai jamais pu trouver de mycélium.

Anatomie de la formation de la gomme.

Le phénomène le plus important, celui qui mérite d'être signalé en premier lieu, est la formation du parenchyme ligneux pathologique, qui plus tard se résout en gomme. Les cellules dont ce parenchyme se compose sont cubiques ou polyédriques, à minces parois et riches en protoplasma. M. A. Trécul avait déjà vu ce tissu [1]), mais ne l'avait pas très bien décrit. Une description exacte en a été donnée par M. E. Prillieux, qui dit [2]): „Il se forme donc ainsi, dans chaque point où va se développer un foyer de gomme, un tissu particulier (parenchyme ligneux) qui n'existe pas dans les tiges saines, et dont l'apparition est si intimement liée à la formation morbide de la gomme, qu'on doit le considérer comme un tissu pathologique''. Dans une communication postérieure [3]), M. Prillieux est entré dans de nouveaux détails à ce sujet. M. A. Wigand dit que ces cordons de parenchyme ne se continuent pas sans interruption dans les branches du cerisier, mais qu'ils sont coupés de distance en distance par les rayons médullaires et, de cette manière, divisés en étages [4]). Dans les branches du pêcher, je n'ai rien observé de cette division; j'y ai trouvé de longs cordons parenchymateux continus et des canaux gommifères. MM. Wigand et Frank ont remarqué que les cellules de ces cordons affectent une disposition rayonnée par rapport au centre, et même M. Trécul semble déjà avoir aperçu cette disposition; il ne me paraît pas impossible qu'elle soit l'indice d'une origine commune pour ces cellules, lesquelles seraient nées d'une seule ou d'un petit nombre

---

1) *Maladie de gomme chez les cerisiers, les pruniers, les abricotiers, les amandiers*, dans *Comptes rendus*, 1860, t. II, p. 621.

2) *Etude sur la formation de la gomme dans les arbres fruitiers*, dans *Comptes rendus*, 1864, p. 135.

3) *La production de gomme dans les arbres fruitiers considérée comme phénomène pathologique*, dans *Comptes rendus*, 1874, p. 1190.

4) *Ueber die Deorganisation der Pflanzenzellen, insbesondere über die physiologische Bedeutung von Gummi und Harz*, dans Pringsheim, *Jahrbücher*, III, 1863, p.132.

de cellules primitives. M. Frank décrit les cordons en question de la manière suivante [1]) : „Le parenchyme ligneux gommipare est disposé en cordons à section transversale arrondie, qui généralement sont limités aux deux côtés par des rayons médullaires, en avant et en arrière par des tissus normaux du corps ligneux, et qui d'ordinaire se trouvent juxtaposés au nombre de plusieurs dans une couche annuelle. Fréquemment, les cellules centrales de pareils groupes sont notablement plus grandes que les cellules ambiantes, lesquelles par suite sont plus ou moins aplaties et disposées concentriquement autour du centre, de manière à donner à l'ensemble du groupe une forme exactement circulaire. Par suite de la multiplication plus rapide, en ce point, des cellules de la couche cambiale, et du développement prépondérant des cellules centrales, il arrive ordinairement qu'un semblable groupe, à peine formé, s'avance par sa couche cambiale, sous forme d'arc, dans le liber". — Je dois encore mentionner ici que les canaux gommifères, chez le pêcher, se rencontrent moins souvent dans le bois des rameaux (*g k*, fig. 3) que dans le liber mou (*g p*, fig. 3), de sorte que la fig. 3 représente, sous ce rapport, un cas exceptionnel.

D'après MM. Wigand et Frank, la formation de la gomme, dans les cordons, procède du centre et attaque d'abord les membranes primaires, ce qui indique, me semble-t-il, une action de ferment; lorsque la gomme se forme aux dépens de parois vasculaires, c'est au contraire la membrane secondaire qui est atteinte la première (Frank), probablement parce que le ferment gommipare déborde dans la cavité du vaisseau. Quant à l'assertion de M. Frank [2]), qu'il peut se *former* dans les vaisseaux tant de gomme, „que nous devons admettre, avec M. Karsten, non seulement la transformation en gomme de la membrane cellulaire, mais aussi, simultanément, l'assimilation de nouvelle gomme, puisée dans le suc nourricier", je me l'explique en

1) *Ueber die anatomische Bedeutung und die Entstehung der vegetabilischen Schleime*, dans Pringsheim, *Jahrbücher*, V, 1866—67, p. 161.

2) *l.c.* p. 192.

supposant que, dans les cas en question, ou bien de la gomme du dehors a coulé dans le vaisseau, ou bien des filaments de *Coryneum* se sont transformés directement en gomme. Sur ce dernier point je reviendrai ci-dessous. — La disparition de la fécule, dans les tissus gommipares, est un fait certain; mais qu'elle puisse avoir lieu, comme le veut M. Frank, sans changement notable de forme, j'en doute, n'ayant jamais pu l'observer directement. Après avoir malaxé de la fécule de pomme de terre avec de la gomme de pêcher infectée de *Coryneum*, j'ai abandonné ce mélange à lui-même dans une enceinte humide; au bout de trois jours, le volume de la gomme avait notablement augmenté et au microscope on pouvait reconnaître que beaucoup de grains de fécule étaient fortement gonflés, mais une transformation complète en gomme n'a pas eu lieu. Dans de la gomme de cerisier, qui était pauvre en *Coryneum*, j'ai rencontré des grains de fécule non altérés. M. Mercadante [1]) dit qu'il a vu la gomme se former sur la paroi de la cellule, tandis qu'en un autre point la fécule disparaissait dans le protoplasma. Au voisinage des canaux gommifères des branches de pêcher, beaucoup de cellules, sur le point de subir la métamorphose en gomme, laissent voir dans leur protoplasma la formation d'un corps jaunâtre, un peu translucide, qui ressemble ordinairement à un grain de fécule irrégulier, mais assez souvent aussi présente une forme botryoïde, et qui plus tard, quand toute la cellule se dissout, éprouve également une liquéfaction complète, en se changeant en gomme.

Dès que les cordons parenchymateux sont fondus en gomme, totalement ou partiellement, certaines cellules, situées dans la gomme ou à sa limite extérieure, commencent à croître et à se diviser activement, et à former ainsi de petits filaments cellulaires ramifiés, dendritiques (*c d*, fig. 4 *b*, Pl. III), qui ressemblent un peu au *Chroolepus* [2]). M. Wigand est le premier qui ait fait mention de ce fait; il dit que ces cellules contiennent

[1]) *Botanischer Jahresbericht*, IV, 1876, p. 916.

[2]) B. Frank, *Die Krankheiten der Pflanzen*, t. I, 1880, p. 89, fig. 12.

de la fécule et des gouttelettes d'huile, mais, à mon avis, les gouttelettes rondes consistent en gomme. J'ai soumis ces proliférations cellulaires, qui se trouvent dans les canaux gommifères des branches de pêcher, dans les canaux gommifères des fruits du pêcher-amandier (*g p*, fig. 4 *b*) et dans les cavités à gomme des branches de cerisier, à une étude attentive, parce que l'idée se présentait assez naturellement que le mycélium du *Coryneum*, après s'être changé en pseudo-parenchyme, pouvait prendre cette forme. Mais chaque nouvel examen m'a ramené à la conviction que les filaments cellulaires doivent appartenir à la plante nourricière; telle est aussi l'opinion de M. Wigand et de M. Frank. Finalement, il y a encore à mentionner que le parenchyme ligneux pathologique naît souvent, aux dépens du cambium, sur tous les points à la fois d'une surface considérable, sous la forme d'un large ruban. Cela peut avoir lieu, paraît-il, chez toutes les Amygdalées. Aucun fait n'est plus propre à réfuter l'hypothèse que les faisceaux décrits seraient des „rhizomorphes pseudo-parenchymateux de *Coryneum*", hypothèse qui au premier abord, quand on apprend que la maladie de gomme est contagieuse, semble très plausible.

Tout le monde sait que ce ne sont pas seulement les branches des Amygdalées qui peuvent être attaquées par la gomme, mais aussi leurs fruits, en particulier les prunes. M. Kutzing a donné une figure de cette gomme [1]. Les nombreuses bulles dont est criblée la gomme de prunier se trouvent aussi bien dans la gomme du fruit que dans celle des branches; chez les autres Amygdalées, je ne les ai pas vues. Le pêcher-amandier paraît être extrêmement sujet à cette forme de la maladie de gomme: dans le jardin de l'Ecole d'agriculture de Wageningen, il y a un arbre de cette espèce, dont presque tous les fruits ont leur chair traversée d'innombrables canaux gommifères. En étudiant l'arrangement et la situation de ces canaux gommifères (*g p*, fig. 4 *a*), on reconnaît qu'ils suivent le cours des faisceaux

1) *Grundzüge der philosophischen Botanik*, Leipzig, 1851, p. 206, pl. III, fig. 1.

vasculaires et que chaque canal naît de la liquéfaction complète ou partielle d'un faisceau de phloème (*p h*); les faisceaux de xylème (*x l*) restent tout à fait intacts. Les faisceaux vasculaires situés au voisinage immédiat du noyau (fig. 4 *a*) sont moins atteints que ceux qui sont plus rapprochés de la périphérie. Dans les canaux gommifères (*g p*, fig. 4 *b*), il n'est pas difficile de trouver les filaments cellulaires (*c d*) dont il a été parlé plus haut; ils procèdent des cellules du phloème qui n'ont pas encore subi de changements notables. Bien que j'aie examiné avec le plus grand soin le tissu d'un fruit malade de pêcher-amandier, je n'ai pu y découvrir de mycélium de *Coryneum*. Par contre, dans la gomme qui après la chute des fruits non mûrs ne tarde pas à découler de leurs pédicelles, abondent les diverses formes de mycélium et de levûre qui sont caractéristiques pour le *Coryneum Beyerinckii*.

En introduisant de petites fragments de gomme à *Coryneum* dans de jeunes abricots, je n'ai pu communiquer la maladie à ces fruits; ils ont continué à se développer normalement. De jeunes prunes, traitées de la même façon, sont au contraire tombées peu de temps après, mais sans sécréter de la gomme.

Physiologie de la formation de la gomme. La gomme naît en partie aux dépens du mycélium même du Coryneum.

Nous devons maintenant nous poser la question de savoir comment on peut s'expliquer la production du parenchyme pathologique.

Tout ce qui précède étant pris en considération, je crois que dans cette production le ferment du *Coryneum* joue le rôle principal. Ce ferment peut être absorbé par le protoplasma des cellules cambiales; du moment que cela a eu lieu, la division de ces cellules ne donne plus naissance à du bois secondaire, ni à du phloème secondaire, mais au parenchyme pathologique. Cette production continue jusqu'à ce que les cellules cambiales

meurent, où jusqu'à ce qu'elles se rétablissent, probablement en détruisant le ferment par leur activité propre.

Si l'on adopte cette explication, — et je ne vois pas qu'une autre soit possible, — le fait, que dans les rayons médullaires ou dans l'écorce quelques cellules isolées peuvent être attaquées de la gomme, devient aussi moins énigmatique.

Admettre, toutefois, que des cellules en voie de division éprouvent, par l'absorption d'un corps de la nature des ferments, un changement persistant ou de longue durée, c'est une induction qui n'acquiert quelque valeur que si elle est appuyée de faits bien établis. La physiologie de la formation des galles nous offre, dans son vaste champ, une longue série de pareils faits, de la plus riche variété. Les remarquables changements déterminés par l'*Aecidium euphorbiae* sur différentes espèces d'*Euphorbia*, par l'*Aecidium elatinum* sur l'*Abies pectinata*, par l'*Aecidium thesii* sur le *Thesium intermedium*, — tous ces exemples ont déjà été cités et discutés si souvent, qu'il est inutile de nous y arrêter. Rien, toutefois, ne plaide autant en faveur de mon hypothèse que ce phénomène, bien avéré, que la panachure ou l'albinisme, — c'est-à-dire l'absence physiologique de la matière colorante dans les grains de chlorophylle, — peut, dans l'opération de la greffe, passer directement de l'ente au sujet, ou *vice versâ*. Dans la pratique de l'horticulture, ce phénomène est aujourd'hui généralement connu; Gärtner, Darwin et M. Frank ont rassemblé une foule de faits qui y sont relatifs, mais que je ne puis mentionner ici. M. F. W. Burbidge dit à ce sujet [1]): „En ce qui concerne les Pelargoniums panachés, la greffe d'une très petite portion de tissu cellulaire, prise en une partie colorée de la tige ou des feuilles, suffit amplement pour provoquer la panachure dans une plante à feuillage vert, et ce fait mérite l'attention des horticulteurs et de ceux qui s'occupent d'hybridation, etc". M. E. Morren, ayant greffé

[1]) *Cultivated plants, their propagation and improvement*, London, 1877, p. 602.

l'*Abutilon Thompsoni* sur *Abutilon venosum*, *A. striatum* et *A. vexillarium*, a vu qn'un seul pétiole peut transmettre la panachure [1]: „Il suffit, ainsi que nous l'avons constaté par expérience, d'insinuer un pétiole de feuille panachée dans l'écorce d'un sujet incolore, pour lui infuser, en quelque sorte, cette altération de la chromule qui caractérise la panachure. Il va sans dire que ce pétiole vit peu de temps en pareille situation". Ces exemples, qu'il serait facile de multiplier, montrent péremptoirement que des matières d'une nature très spéciale peuvent sortir des cellules d'un organisme, pénétrer dans le protoplasma d'un autre organisme et modifier ce protoplasma de telle sorte, que les cellules auxquelles il donne naissance par sa division soient douées d'une propriété nouvelle. A ce genre de matières appartient, suivant ma conviction, le ferment du *Coryneum*.

J'ai essayé, en exprimant le suc des feuilles et des branches d'arbres et d'arbrisseaux albinotiques et injectant ce suc dans le cambium et l'écorce d'individns des mêmes espèces à l'état vert normal, de déterminer l'albinisme chez ces derniers. Ces expériences, toutefois, n'ont donné absolument aucun résultat: même les jets les plus délicats et les feuilles les plus jeunes ont pu être injectés ou arrosés du suc, sans que la moindre trace de décoloration se manifestât. Il suit de là qu'on n'a pas de raisons non plus pour croire que le suc provenant de tissus gommeux doive, dans les essais d'infection artificielle, donner lieu à la maladie de gomme. Le résultat négatif de mes expériences sur l'inoculation de tissus gommeux de branches de cerisiers dans des branches saines de la même espèce, n'est donc pas en contradiction avec la théorie du ferment de *Coryneum*.

Nous sommes maintenant assez avancés dans l'étude du sujet pour aborder la question de savoir si la maladie de gomme ne peut naître d'une autre manière que par infection corynéenne. De tout ce qui a été écrit sur la maladie de gomme il résulte une forte présomption que cette maladie peut apparaître indé-

---

1) *Contagion de la panachure* (*variegatio*), Bruxelles, 1869, p. 6.

pendamment de tout organisme infectant; dans une foule de cas, — je puis l'affirmer d'après ma propre expérience, — il est impossible de rien découvrir du parasite dans les tissus gommeux. Aujourd'hui, toutefois, à raison des expériences ci-dessus décrites, je suis convaincu que, dans tous les cas de ce genre, le ferment de *Coryneum* a pénétré antérieurement dans les cellules, ou dans les *ancêtres* — peut-être très éloignés — des cellules, qu'il s'y est uni au protoplasma, s'est développé avec lui et finalement, les circonstances ayant changé, a occasionné les phénomènes pathologiques qui caractérisent la maladie de gomme. Combien de temps le ferment peut-il rester dans les cellules? Ces cellules elles-mêmes acquièrent-elles par là des propriétés contagieuses (point déjà touché plus haut)? Le ferment peut-il, dans des cellules en apparence saines, exister à l'état „latent"? Ce sont là autant de questions intéressantes, mais dont la solution paraît offrir de très grandes difficultés. Je me réserve de revenir, dans une autre occasion, sur tous les faits mentionnés ici.

La gomme a deux origines différentes; la plus grande partie provient des tissus de la plante attaquée, une petite partie résulte de la dégradation du mycélium du *Coryneum* lui-même. Cela s'applique non seulement à la gomme des Amygdalées, mais aussi à la gomme arabique et peut-être à beaucoup d'autres gommes. Le fait que le mycélium du *Coryneum* peut se transformer en gomme rappelle un peu „l'estomac qui se digère lui-même", et ce fait me semble extrêmement remarquable.

Nous avons vu que le ferment du *Coryneum* paraît s'unir au protoplasma des cellules de la plante attaquée et lui imprimer un changement tel, que les cellules naissant de la division de ce protoplasma possèdent de nouvelles propriétés. Ce n'est pas encore la maladie de gomme, mais seulement un symptôme précurseur, accessoire. Une des nouvelles propriétés dont il s'agit, c'est que les cellules du parenchyme pathologique, à un moment donné, se transforment en gomme. Que cela ait lieu en vertu d'une action de fermentation, l'analogie nous oblige à

l'admettre. Personne ne doute plus, en effet, que la formation de la gomme aux dépens des fibres libériennes et des parois vasculaires, — observée par tous les botanistes qui se sont occupés de la maladie de gomme, — ne dépende d'une pareille action, et il n'est pas probable que le même effet doive, dans ce cas, être attribué à deux causes entièrement différentes. Lorsque le parenchyme pathologique commence à se fondre en gomme, cela tient donc sans doute à l'intervention du même ferment qui a été sécrété à l'origine par le *Coryneum*, mais qui maintenant provient du parenchyme pathologique lui-même. La grande abondance de la gomme ainsi produite conduit à penser que le parenchyme en question dispose de beaucoup plus de ferment que n'en avaient primitivement absorbé les cellules cambiales d'où ce parenchyme est dérivé. Comme les parois primaires sont les premières à se changer en gomme, le ferment paraît, dans ce cas aussi, abandonner les cellules et se répandre dans tout le tissu ambiant, et on ne peut guère douter que sous cette influence les parois de cellules parfaitement saines puissent être transformées en gomme, ainsi que cela semble avoir réellement lieu pour des grains de fécule isolés. Les fibres libériennes et les parois vasculaires peuvent également se convertir en gomme, sans qu'il y ait du mycélium de *Coryneum* dans leur voisinage immédiat.

Ces considérations rendent compréhensible la formation de la gomme aux dépens du mycélium de *Coryneum*. Les circonstances dans lesquelles cela arrive autorisent à admettre que le Champignon est alors très mal nourri; ce sont, en effet, les filaments de *Coryneum* enveloppés de toute part par la gomme qui subissent la transformation. Ces filaments, primitivement colorés en brun intense, se sont alors fortement allongés, ils sont devenus incolores et à parois minces, comme débilités par excès de croissance, leurs cloisons transverses sont très espacées et il n'y a que peu de protoplasma dans les cellules. Le processus de la fusion proprement dite est de tout point semblable à la gommification des tissus des Amygdalées: les cellules du *Coryneum*

disparaisent complètement (*b*, fig. 2, Pl. II), le protoplasma lui-même finit par se dissoudre dans la gomme en une masse homogène et limpide; sa nature granuleuse reste pourtant longtemps distincte et il n'est pas douteux que les parois des cellules soient attaquées les premières. Parfois il arrive que ces parois acquièrent, en se dissolvant, un pouvoir réfringent un peu différent de celui du reste de la gomme, et dans ce cas il est facile de reconnaître la part qui appartient, quant à la quantité de gomme formée, à la cellule en question. Il est à remarquer que de deux cellules contiguës, dans un même filament cellulaire, l'une peut passer à l'état de gomme, tandis que l'autre demeure intacte.

Les filaments mycéliens ténus et mal nourris sont jusqu'ici la seule forme de *Coryneum* dont j'aie constaté la participation à la métamorphose gommeuse: jamais je n'ai vu se résoudre en gomme ni l'état de levûre, ni la forme de fumago, qui d'ordinaire sont entièrement inclus dans la gomme. Par contre, je crois avoir observé positivement que cela arrive parfois à des filaments de moisissures étrangères, que la gomme peut accidentellement renfermer! C'est ainsi que la fécule de pomme de terre, mélangée de gomme, change également, sous l'influence du *Coryneum*, en un corps volumineux, de consistance gélatineuse. Les grains deviennent alors irréguliers de forme, perdent leur structure en couches concentriques et acquièrent, sur beaucoup de points, de grosses excroissances.

Je présume que la métamorphose ci-dessus décrite des cellules de *Coryneum* ne s'effectue que lorsque, par l'une ou l'autre cause, ces cellules sont affaiblies ou commencent à dépérir: incapables alors de résister plus longtemps à l'action du ferment partout répandu dans la gomme, elles subissent la même altération à laquelle sont sujets les tissus des Amygdalées.

M. Frank a appelé l'attention sur le fait que la quantité de gomme découlant des plaies est souvent beaucoup plus grande que le volume des tissus qui ont disparu en cet endroit [1]:

1) *Die Krankheiten der Pflanzen*, t. I, 1880, p. 92.

„Nous sommes ainsi amenés à conclure que dans la maladie de gomme, de même que dans le flux de résine, outre les membranes cellulaires servant de matériaux pour la formation de la sécrétion, il est encore consommé pour cet objet une certaine quantité de matières nutritives, qui, dans les conditions normales, auraient trouvé un autre emploi". Ce surplus d'aliments est, d'après ma conviction, consommé par le parasite, qui plus tard participe lui-même à la formation de la gomme.

Il n'est peut-être pas superflu de donner un résumé succinct de l'idée que je crois maintenant devoir me faire de la maladie de gomme.

Le *Coryneum* sécrète un liquide, — le ferment de *Coryneum*, — qui agit énergiquement sur les parois cellulaires, sur les grains de fécule et probablement sur d'autres éléments de la cellule, et qui peut transformer ces matières directement en gomme, soit qu'elles appartiennent aux tissus des Amygdalées ou au *Coryneum* lui-même.

Le ferment de *Coryneum* peut pénétrer dans les cellules vivantes, par exemple dans le cambium, s'unir au protoplasma et modifier celui-ci de telle sorte que les cellules qui en naissent plus tard, par division, constituent un tissu possédant des propriétés nouvelles: ce tissu est le parenchyme ligneux pathologique.

Tôt ou tard ce parenchyme commence à sécréter de nouveau le ferment de *Coryneum* et se change en gomme. La quantité du ferment ainsi formé est plus grande que celle qui avait été fixée primitivement par les cellules d'où est dérivé le parenchyme pathologique.

La maladie de gomme peut se communiquer des parties infectées aux branches saines, sans qu'il soit possible de découvrir un mycélium de *Coryneum* s'étendant des unes aux autres. Cette propagation de l'infection est donc comparable à l'action contagieuse que des parties albinotiques exercent sur des tissus verts.

J'ai lieu de présumer que la voie par laquelle se meut le contage de la maladie de gomme est le phloème, et que ce contage est identique au ferment de *Coryneum*.

Dans d'autres cas, le développement du mycélium de *Coryneum* est la cause de la propagation de la maladie de gomme.

IV. PLEOSPORA GUMMIPARA, LE PARASITE DE LA GOMME ARABIQUE.

La grande analogie qui existe, quant à la composition chimique et au mode de formation, entre la gomme arabique et la gomme des Amygdalées, suggère involontairement l'idée que la première de ces gommes pourraît être, tout comme la seconde, le produit de l'action d'un parasite. A la fin de ce Mémoire, je mentionnerai l'opinion de deux auteurs qui croient avoir effectivement observé que la maladie gommeuse peut être en rapport avec le parasitisme; d'après eux, toutefois, les organismes pouvant occasionner cette maladie ne seraient pas des Champignons, comme j'essaierai de le démontrer, mais des parasites phanérogames.

M. J. Möller [1]) a observé que la gomme d'Acacia peut consister en un mélange de deux espèces de gommes différentes. Suivant lui, la vraie gomme arabique, complètement soluble dans l'eau, naîtrait dans l'écorce interne, par un processus physiologique normal, dont il compare la signification biologique à la formation des plaques de rhytidome (*Borke*). Quant à la seconde espèce de gomme, qui dans l'eau se gonfle et devient du mucilage, il dit: „Les Acacias fournissent aussi un produit analogue à la gomme de cerisier. Ce produit n'a été rencontré que dans l'écorce moyenne et paraît se former en vertu d'une nocuité agissant du dehors". Sous ce nom de „nocuité", M. Möller entend l'une ou l'autre influence météorologique, mais il n'a pas en vue le parasitisme.

---

[1]) Joseph Moeller, *Ueber die Entstehung des Acacien-Gummi*, dans *Sitz. ber. d. Kais. Akad. d. Wiss. z. Wien*, Bd. 72, Abth. 1, p. 230.

En ce qui concerne l'existence de deux espèces de gommes, dont il est ici question, il faut remarquer que les qualités inférieures de gomme arabique, par exemple celle de Natal et de Madras, ne se dissolvent que partiellement dans l'eau et laissent beaucoup de mucilage. Elles se rapprochent par là de la gomme de cerisier, qui, d'après M. Wigand, consiste en un mélange d'arabine, soluble dans l'eau froide, et de cérasine; cette dernière matière ressemble à la bassorine, mais en diffère par sa solubilité dans l'eau bouillante [1]). La forme corynéenne du parasite de la gomme arabique, le *Pleospora gummipara*, que je décrirai plus loin, a toutefois été trouvée dans la gomme arabique de toute première qualité, complètement soluble dans l'eau; il en est de même des pycnides et des périthèces du parasite, avec cette différence pourtant que dans les fentes de l'écorce, au voisinage de ces derniers organes, il se trouve un peu de mucilage ne se dissolvant pas entièrement dans l'eau, de sorte que je puis confirmer l'observation de M. Möller, suivant laquelle la gomme arabique contiendrait un mélange de deux espèces de gommes.

Il n'est pas facile de trouver de bons matériaux d'étude pour la gomme arabique, c'est-à-dire, des morceaux de gomme auxquels adhère encore une partie de l'écorce ou du bois de la plante. M. W.-F. Thiselton Dyer a eu la bonté, — et je l'en remercie bien cordialement, — de me permettre d'examiner avec soin les échantillons de gomme du Musée de Kew et d'en emporter des fragments pour préparations microscopiques. Son assistant, M. J.-M. Hillier, m'a donné au sujet de ces échantillons, avec la plus grande obligeance, tous les éclaircissements désirables. J'ai eu ainsi l'occasion d'étudier l'écorce d'*Acacia arabica* parmi la gomme arabique de Madras, d'*A. arabica* parmi la gomme arabique de Natal, d'*A. vera* parmi la gomme „bara" du Scinde, et enfin les petits fragments de bois d'*A. catechu*, qui se trouvent dans la gomme „kheir" de l'Inde.

---

[1]) Pringsheim, *Jahrbücher*, III, 1863, p. 116.

Dans tous ces cas, sauf pour la gomme kheir, j'a réussi à trouver dans la gomme des filaments mycéliaux déliés, qui sont à la vérité plus minces que ceux du *Coryneum Beyerinckii*, mais qui pourraient appartenir peut-être à des espèces voisines (*a*, fig. 5, Pl. III). En outre, dans la gomme de Natal, j'ai rencontré quelques spores quadricellulaires et tricellulaires (*c*,fig.5), plus petites et à parois plus épaisses que celles de l'espèce sus-nommée, mais pouvant d'ailleurs parfaitement provenir d'un *Coryneum*. Enfin, également dans la gomme de Natal, j'ai découvert la „forme de levûre" (*b*, fig. 5), qui m'était si bien connue par l'étude de la gomme de pêcher. Ni pulvinules entiers de *Coryneum*, ni fructifications d'autre sorte ou d'autres espèces de Champignons, ne furent trouvés dans les gommes en question.

Quoique le résultat de cet examen ne fût pas de nature à autoriser un jugement catégorique, il m'avait pourtant fortement affermi dans la présomption que, dans ces cas aussi, la production de la gomme pouvait être liée par un rapport causal au mycélium trouvé; ce point méritait une étude plus approfondie. Par deux voies je cherchai à atteindre le but. D'abord, en tâchant de découvrir le parasite dans la gomme arabique du commerce, ce qui m'a effectivement réussi, comme on le verra tout à l'heure. En second lieu, en cherchant la forme aérienne du *Coryneum* sur quelques feuilles et épines d'échantillons séchés d'*Acacia arabica*, que j'avais rapportées de Kew; le conservateur de l'herbier, M. Nicholson, m'avait en effet laissé détacher de ces échantillons, en vue de l'étude microscopique, les parties sur lesquelles je croyais apercevoir des organismes étrangers. Cette étude ne m'a toutefois pas conduit à une conclusion certaine. Quant à la chance de trouver de la gomme sur les échantillons de l'herbier, M. Nicholson l'avait déclarée si faible, que je n'ai pas fait de tentatives en ce sens.

Mais, ainsi que je l'ai dit plus haut, j'ai réussi au-delà de toute attente, et cela sans sortir du pays, en portant mes investigations sur la gomme du commerce. J'avais obtenu de M. Voornveld, d'Amsterdam, la permission d'explorer son stock

considérable de gomme arabique et d'y prendre les morceaux qui me paraîtraient propres aux recherches. Bien que cette gomme eût déjà été assortie à Trieste, je trouvai, dans les caisses de la première qualité, de si excellents matériaux d'étude, qu'il me fut possible de découvrir non seulement la forme corynéenne du parasite cherché, mais aussi ses périthèces et ses pycnides. Cet organisme est donc aujourd'hui connu d'une manière plus complète que le *Coryneum Beyerinckii*, qui se rencontre dans presque toute plaie gommeuse des Amygdalées, mais dont les périthèces, les pycnides et les spermogonies sont restés inconnus jusqu'ici.

Je vais maintenant décrire brièvement le nouveau parasite. M. Oudemans, après une étude approfondie de mes préparations, a donné à ce Champignon le nom de *Pleospora gummipara* et m'a fourni à son sujet une foule de renseignements dont il sera fait usage dans les lignes suivantes.

Du *mycélium* du *Pleospora gummipara* je n'ai vu jusqu'ici que deux formes bien distinctes, l'une composée de filaments celluleux d'un diamètre de 2—4 μ, à parois médiocrement épaissies et d'un brun plus ou moins foncé (*a*, fig. 8, Pl. III), l'autre, l'état de fumago (*b*, fig. 8), consistant en cellules sphériques ou légèrement aplaties par compression mutuelle, mesurant également 2—4 μ en diamètre, à parois épaisses et d'un brun très foncé. Ces deux formes de mycélium sont unies l'une à l'autre par tous les passages possibles. Les filaments se voient surtout entre les éléments du phloème de l'écorce d'Acacia, et souvent ils leur ressemblent à tel point, qu'on ne les en distingue qu'à leur couleur plus foncée; en quelques endroits, la ressemblance est encore augmentée par la circonstance que le mycélium reste sur une longueur considérable parallèle aux rangées de cellules du parenchyme du phloème, et qu'il prend, par le rapprochement des cloisons transversales, la forme de pseudo-parenchyme. Les petits amas de fumago se rencontrent plus près de la surface extérieure et en contact direct avec la gomme exsudée. Les filaments mycéliaux, qui peuvent aussi être trouvés

en grande abondance dans la gomme même, sont beaucoup plus minces que ceux du *Coryneum Beyerinckii* de la gomme des Amygdalées, mais du reste entièrement semblables à ceux-ci. J'ai constaté que ces filaments mycéliaux sont sujets, tout comme ceux de l'espèce nommée en dernier lieu, à la métamorphose en gomme, processus qui a été décrit et figuré (*b*, fig. 2) plus haut; il est donc certain que la gomme arabique, si elle provient en majeure partie des cellules de l'Acacia, n'en dérive pas exclusivement, mais qu'une partie se forme aux dépens du *Pleospora gummipara* lui-même. Bien que je n'en aie pas la preuve directe, il me paraît assez probable que la partie mucilagineuse, insoluble dans l'eau, de la gomme arabique, partie qui se trouve en contact immédiat avec l'écorce des branches d'Acacia, naît du mycélium du *Pleospora*, tandis que la partie complètement soluble dans l'eau proviendrait alors exclusivement du tissu de la plante nourricière. Je dois toutefois faire remarquer, à ce propos, que la partie insoluble de la gomme des Amygdalées a indubitablement la double origine dont il est ici question.

Considérons maintenant les organes de la fructification du *Pleospora gummipara*. J'en ai rencontré de quatre formes différentes, savoir des *périthèces* (fig. 11, Pl. III), deux espèces de *pycnides* (fig. 9), l'une à stylospores unicellulaires (fig. 9 *b*), l'autre à stylospores pluricellulaires (fig. 10), enfin des *pulvinules conidiens* de la forme du *Coryneum* (fig. 6) [1]).

De ces formes, les pycnides et les périthèces dévoilaient immédiatement leur connexité par leur structure et par la circonstance qu'on les rencontrait sur un seul et même mycélium. Mais

1) J'ai trouvé des spermogonies d'une structure très particulière sous l'épiderme couvert de gomme de quelques éclats d'écorce, entre les cellules cristallifères. L'hyménium producteur des spermaties tapisse, dans l'écorce d'Acacia, une cavité étroite ou fente, irrégulièrement aplatie, lenticulaire, communiquant avec l'extérieur par une petite ouverture de l'épiderme; çà et là se trouvent des cloisons brunes, constituées par un mycélium d'une ténuité excessive, qui partagent la cavité en différentes spermogonies, un peu irrégulières, mais présentant du reste la forme ordinaire. Le stroma

quant à la forme de *Coryneum*, il n'était pas directement évident qu'elle appartînt à la même espèce, car elle fut trouvée sur d'autres fragments d'écorce. Les raisons pour lesquelles, néanmoins, j'ai cru devoir rapporter l'état de *Coryneum* à la même espèce qui fournit les périthèces et les pycnides, savoir au *Pleospora gummipara*, sont les suivantes:

1°. Les conidies de *Coryneum* se trouvent sur un stroma qui naît d'un mycélium identique au mycélium très caractéristique auquel sont attachés les périthèces et les pycnides.

2°. Au point de vue botanique, on doit s'attendre à ce qu'aux conidies trouvées se rattachent des périthèces et des pycnides, et M. le professeur Oudemans m'a déclaré qu'aucune difficulté systématique ne s'oppose à l'identification spécifique de toutes les formes de fructification observées dans la gomme.

3°. Les périthèces, les pycnides et les conidies se présentent dans des conditions biologiques presque exactement semblables, à savoir, sous une épaisse couche de gomme, dans l'écorce.

4°. Relativement à l'Acacia, la gomme est indubitablemont un produit pathologique, mais il me paraît à peu près certain que pour le parasite elle a une grande utilité, soit en favorisant la dissémination des spores, soit de toute autre manière, de sorte que la propriété gommipare doit être regardée comme un important caractère biologique du parasite. Or, c'est le propre des caractères biologiques fortement prononcés, de donner à leurs possesseurs un avantage marqué sur les formes *très voisines* qui en sont privées, en d'autres termes, de rendre à ces dernières la concurrence impossible dans des circonstances où les premiers se développent avec une vigueur particulière. D'après cette vue générale, il est très improbable que dans la gomme arabique

brunâtre, qui donne naissance à l'hyménium, est tapi entre les cellules cristallifères. Comme je n'ai pu obtenir la certitude que ces spermogonies naissent du mycélium du *Pleospora*, ou sont en connexion directe avec lui, je n'ose les considérer comme organe du *Pleospora gummipara* et je ne m'y arrêterai donc pas davantage. D'ailleurs, toutes les autres espèces connues de *Pleospora* paraissent être apogames.

puisse vivre un autre organisme, ayant une étroite parenté avec le vrai parasite gommipare, mais ne formant pas de gomme; on ne saurait d'ailleurs douter que les périthèces en question, au cas où ils ne seraient pas liés spécifiquement aux conidies de *Coryneum*, dussent au moins appartenir à une espèce très rapprochée [1]; dans ces circonstances, il est évidemment beaucoup plus naturel d'admettre que les états trouvés peuvent réellement procéder l'un de l'autre.

5°. Vers le bas des périthèces, à leur face externe, on trouve çà et là des conidies, qui devraient être désignées sous le nom de *Coryneum*; elles diffèrent toutefois, pas des dimensions plus grandes et par une paroi plus mince, des conidies des pulvinules corynéens proprement dits.

6°. J'ai entrepris l'examen de la gomme arabique dans la conviction de trouver le *Coryneum* et avec l'espoir de rencontrer des périthèces; les résultats ont répondu à cette attente. Or, si l'on considère combien était faible la chance de réussite, il paraîtra sans doute probable, à priori, que j'ai rencontré seulement l'organisme gommipare et non, en outre, quelque autre espèce.

7°. Le *Coryneum Beyerinckii* est incontestablement très rapproché des *Pleospora*: c'est ce que prouve la grande ressemblance des conidies de quelques espèces de ce genre avec les conidies du *Coryneum*. Du moment où j'ai commencé à m'occuper de ce parasite, j'ai toujours eu l'espoir, malheureusement non réalisé, d'en trouver les *périthèces* à forme de *Pleospora*.

Je reconnais que les deux derniers de ces arguments n'ont en eux-mêmes pas grande valeur, mais j'ai cru devoir les citer parce que, joints aux autres, ils ajoutent à leur force.

Après cette digression, qui me semble rendre acceptable la

---

1) Dans la gomme des Amygdalées on rencontre assez souvent, il est vrai, des Champignons étrangers, tels que *Bacterium*, *Penicillium*, *Mucor*, etc.; mais ceux-ci sont très différents du *Coryneum Beyerinckii*, jamais ce ne sont des formes voisines.

connexion entre les conidies, les périthèces et les pycnides, c'est-à-dire, leur attribution à une même espèce, le *Pleospora gummipara*, je puis poursuivre la description des caractères de ces différentes formes de fructification.

Dans quelques éclats minces et noirâtres d'écorce d'Acacia, qui adhéraient à la face externe de morceaux de gomme limpide, plus ou moins blanchâtre par suite de l'existence de nombreuses fissures, j'ai trouvé plusieurs des périthèces et pycnides en question, dont les parois membraneuses consistaient en pseudoparenchyme d'un noir de charbon. La couleur noire des éclats d'écorce est produite, non seulement par de nombreuses cellules corticales brun foncé de la branche d'Acacia même, mais surtout par le mycélium noirâtre du *Pleospora*, qui çà et là se pelotonne en petits amas de fumagine. C'est aussi de ces petits amas de fumagine que procède la formation des états de fructification, c'est-à-dire, des périthèces, des pycnides et des conidies.

Avant de communiquer mes propres observations concernant ces organes reproducteurs du parasite, je citerai la description qu'en a donnée M. Oudemans [1]).

„Pleospora gummipara. *Perithecia* in propinquitate pycnidiorum in corticis parenchymate libere nidulantia, aterrima, glabra, ± perfecte globosa, partem millimetri $\frac{1}{6}$—$\frac{1}{4}$ in diametro metientia, textura membranacea gaudentia, conidia pauca coryneoidia sessilia nonnumquam in superficie gerentia. — Asci (absque ullo paraphysium vestigio) oblongi-obovati, curvati, brevissime stipitati, 90 μ circa longi, superne 18—20 μ lati, 8-spori. Sporidia disticha, rite evoluta septis 3 horizontalibus et unico longitudinali murali-divisa, 6-locularia, p.m. 24 μ longa, 12 μ lata, ovalia vel p.m. obovata, medio utplurimum profundius, supra et infra medium contra ad altitudinem septorum horizontalium magis superficiliater constricta, obscure-fusca, in uno eodemque asco vulgo aliis minus perfecte evolutis, coryneoideis, 4-cellularibus — imo diplodioideis, 2-cellularibus — omnibus tamen quoad di-

---

1) *Hedwigia*, octobre 1883, N°. 10.

mensionem suas sporidia typica murali-divisa aemulantibus, stipata.

Pycnidia dimensione et structura a peritheciis utplurimum non discernenda, alia stylosporidiis indivisis, alia iterum stylosporidiis divisis copiosissimis repleta. — Stylosporidia omnia fusca, tunica cellulari crassiuscula praedita; quae indivisa suborbiculares vel orbiculari-ovalia, quae divisa utplurimum bilocularia, simplicibus 7 μ in diametro metientibus paullo majora, vulgo autem aliis, septis unico verticali, altero horizontali, in tres vel quatuor partes, vel etiam plus minus murali-divisis commixta.

Conidia jam prius sub titulo *Coryneum gummiparum* descripta (*Hedwigia*, 1883, N°. 9).

Les périthèces sont des vésicules globuleuses ou un peu ovoïdes, plus ou moins aplaties en dessous (fig. 11, Pl. III); leur largeur est de $\frac{1}{4}$—$\frac{1}{2}$ mm, leur hauteur de $\frac{1}{6}$—$\frac{1}{2}$ mm. La paroi est extrêmement mince, membraneuse, et consiste en une seule couche cellulaire de pseudo-parenchyme noir, polyédrique, dont les cellules ont un diamètre de 8—12 μ et sont à paroi mince. Comme il n'y a pas d'ostiole, les périthèces s'ouvrent par déhiscence irrégulière. En dessous et sur les côtés de la paroi du périthèce on voit, outre quelques filaments mycéliaux, çà et là des conidies corynéoïdes, qui ne se distinguent des conidies des pulvinules de *Coryneum*, dont il sera question plus loin, qu'en ce qu'elles sont un peu plus grosses et à paroi un peu plus mince; elles sont d'ailleurs, comme les vraies spores de *Coryneum*, sessiles ou très brièvement pédicellées, ce qui les rend difficiles à découvrir. Elles sont quadricellulaires, parfois tricellulaires.

Les périthèces sont plongés presque en entier dans le tissu cortical des branches, et seulement en contact avec la couche de gomme à leur côté supérieur; ils sont, en conséquence, limités par des fibres sclérenchymateuses à parois épaisses et par des cellules cristallifères, qui contiennent un octaèdre tétragonal tronqué d'oxalate de chaux (ces cellules cristallifères se trouvent en quantité immense dans l'écorce d'Acacia).

Les asques (fig. 12) ont tout au plus $\frac{1}{10}$ mm de long et

contiennent 8 spores; la paroi des asques est hyaline et, surtout vers le haut, un peu épaissie. Entre les asques il n'y a pas de paraphyses, mais bien çà et là de fins filaments granuleux, qui toutefois font partie du mucilage dont le périthèce est entièrement rempli (fig. 11). Ce mucilage est sans nul doute le produit du mycélium qui antérieurement occupait tout le périthèce, mais qui plus tard s'est liquéfié, et les filaments granuleux sont les restes du protoplasma de ce mycélium.

Les ascospores sont de petits corps très élégants, de couleur noire; elles atteignent une longueur maximum de 24 μ, sur une épaisseur maximum de 14 μ, mais elles peuvent aussi être plus minces. Elles sont très rarement 4-cellulaires (la fig. 12 montre une pareille spore 4-cellulaire dans la thèque à gauche), mais ordinairement muriformes, 6-cellulaires. Dans chaque spore, sans exception, il y a en effet 3 cloisons transversales, partageant la cavité en quatre compartiments, et chez quelques spores la division en reste là; dans la plupart, toutefois, chacun des deux compartiments moyens est en outre partagé, par une cloison longitudinale, en deux cellules. Les spores qui occupent le fond des thèques sont ordinairement 5-cellulaires, parce que les deux cellules inférieures ne se sont pas divisées.

Les pycnides (fig. 9) ne se distinguent presque pas, à l'extérieur, des périthèces, et ils se trouvent aussi dans une situation tout à fait semblable. Ce sont des vésicules presque sphériques de dimensions très diverses, dont le diamètre peut varier de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{2}$ mm., et dont la paroi, d'un noir de charbon, est extrêmement mince et membraneuse. Cette paroi est composée de pseudo-parenchyme et porte, surtout à l'extrémité inférieure du pycnide, beaucoup de fins filaments mycéliaux; je n'y ai pas vu de conidies. Lorsqu'on comprime les pycnides sous le couvre-objet, ils éclatent, et l'examen microscopique du contenu montre que celui-ci peut être de deux espèces différentes. Il peut en effet y avoir dans les pycnides, ou bien des stylospores unicellulaires, ou bien des stylospores pluricellulaires. Dans la fig. 9*a* on voit un pycnide ouvert par en haut, d'où s'échappe un

courant d'innombrables stylospores unicellulaires; la fig. 9*b* représente ces spores à un grossissement de 500 fois. Elles possèdent une paroi brun foncé et un contenu finement granuleux, et elles rappellent un peu l'*Ustilago carbo*, entre autres aussi en ce qu'elles ne sont pas parfaitement sphériques; leur diamètre est très faible, tout au plus de 8 μ.

Les pycnides de la seconde espèce ne se distinguent pas extérieurement de ceux de la première, mais leur contenu est très différent. Les stylospores (fig. 10) sont en effet composées, dans ce cas, de 2, 3, 4, 5 ou 6 cellules. Lorsque la spore est divisée en quatre, chaque cellule a la forme d'un quart de sphère; quand les cellules sont au nombre de 5 ou 6, elles constituent un petit corps de la forme d'une ascospore en miniature. Jamais je n'ai observé plus de 6 cellules, ni dans les ascospores, ni dans les stylospores. Les stylospores pluricellulaires ont, de même que les unicellulaires, une paroi brun foncé; leur longueur s'élève tout au plus à 12 μ, leur plus grande largeur à 8 μ; ceci ne s'applique toutefois qu'aux stylospores 6-cellulaires, celles à 2, 3 ou 4 cellules n'atteignant que 4 μ en longueur et à peu près autant en largeur.

Les pycnides sont, tout comme les périthèces, immergés dans l'écorce et seulement en contact avec la gomme par leur face supérieure; lors de la déhiscence, les ascospores et les stylospores s'attachent donc nécessairement à la gomme, avec laquelle elles sont sans doute disséminées de l'une ou l'autre manière. La recherche précise des conditions naturelles de la germination de ces spores mettra probablement en lumière des particularités biologiques très intéressantes.

Nous avons maintenant à considérer l'état de *Coryneum* du *Pleospora gummipara*.

Une fois bien familiarisé avec la manière de vivre du *Coryneum Beyerinckii*, je ne doutai pas de l'existence d'un organisme analogue dans la gomme arabique, et j'ai effectivement trouvé quelques petits fragments noirâtres de branches d'Acacia sur lesquels était implanté le parasite cherché; il y formait de très

jolis pulvinules, cachés sous une épaisse couche de gomme, laquelle était fendillée çà et là, mais d'ailleurs d'une limpidité parfaite et presque entièrement soluble dans l'eau [1]). L'habitat du *Coryneum* de *Pleospora gummipara* est tout à fait analogue à celui du *Coryneum Beyerinckii*, car les fragments noirâtres de la plante nourricière furent reconnus pour appartenir à l'écorce de l'Acacia, et le cours tortueux des fibres indiquait la présence de callus traumatique.

Les pulvinules de *Coryneum* du *Pleospora gummipara* sont si petits, — environ $\frac{1}{10}$ de millimètre, — qu'ils ne se laissent isoler qu'au microscope simple; même en cherchant de cette manière, je ne les découvris que lorsque, raclant les fragments d'écorce et examinant la poudre à un grossissement plus fort, j'eus trouvé les spores et acquis ainsi la certitude qu'il devait y avoir des pulvinules de *Coryneum*. De même que pour la recherche des périthèces et des pycnides, il faut commencer par dissoudre dans l'eau la gomme du fragment d'écorce, car les organes de fructification du *Pleospora gummipara* sont si clair-semés, que l'exécution de coupes successives — je le dis par expérience — est un travail infructueux et décourageant.

Comme l'état de *Coryneum* m'a été connu avant les périthèces et les pycnides, et que j'osais à peine espérer trouver aussi ces deux dernières formes, j'avais immédiatement envoyé mes préparations à M. Oudemans, en le priant de vouloir bien déterminer et décrire la nouvelle espèce de *Coryneum*. Cette prière ayant été accueillie et le travail exécuté sans retard, la description de l'état conidien a été publiée, sous le titre de *Coryneum gummiparum*, avant celle des périthèces et des pycnides. Voici cette description [2]):

---

1) N'ayant pas réussi à faire germer les ascospores, les stylospores ou les conidiospores du *Pleospora gummipara* dans une décoction d'écorce d'Acacia, mêlée d'eau sucrée, je dois admettre que les échantillons étudiés étaient morts.

2) *Hedwigia*, septembre 1883, N°. 9.

„Acervis minutissimis, punctiformibus, atris, gregarie crescentibus; conidiis e pulvinulo parenchymatoso fuscescente oriundis, breviuscule stipitatis, oblongis vel oblongo-obovatis, separatim examinatis dilute fuligineo-olivascentibus, 3-septatis (4-locularibus), ad altitudinem septorum minime constrictis, 14 μ longis, 6 μ latis, loculis omnibus aequalibus et aequicoloratis; sterigmatibus colore carentibus, conidiis ut videtur brevioribus vulgo non rite distinguendis. Paraphyses desunt". M. Oudemans ajoute l'observation que ce *Coryneum* est très voisin du *Coryneum microstictum*, qui vit sur l'écorce du *Rubus fruticosus*, et dont il ne se distingue, à part la propriété de déterminer la maladie de gomme, que par ses pulvinules plus petits, ses conidies unicolores et leurs pédicelles plus courts.

L'état de *Coryneum* du nouveau parasite est représenté dans la fig. 6. Les spores 4-cellulaires sont colorées en brun grisâtre, sessiles ou presque sessiles sur un stroma mince, qui est composé de cellules pseudo-parenchymateuses brun foncé à parois épaisses, lesquelles cellules naissent, comme on le voit très distinctement en quelques points, des cellules filamenteuses du mycélium. Dans le stroma, au côté gauche de la figure, sont indiquées, en contour, deux cellules de la branche d'Acacia. Il est à remarquer que les spores de ce *Coryneum* sont tellement petites que lorsque, dans l'eau des préparations microscopiques, elles éprouvent accidentellement le choc de particules agitées d'un mouvement moléculaire, elles sont elles-mêmes mises en mouvement; leur longueur est de 10—10 μ, leur plus grande largeur de 4 μ.

Les cellules des branches d'Acacia, sur lesquelles le stroma est directement appliqué, sont de trois espèces différentes (fig.7): d'abord, de grandes cellules ponctuées, incolores, à parois faiblement épaissies; en second lieu, des fibres sclérenchymateuses à parois épaisses et à cours souvent tortueux; en troisième lieu, des cellules brun foncé à contenu homogène; enfin des cellules cristallifères, renfermant un gros grain d'oxalate de chaux, qui devient souvent libre lors de la préparation. Ces différentes formes de cellules pouvant être trouvées facilement dans l'écorce

d'Acacia, il me paraît probable, eu égard au cours tortueux des fibres, que les pulvinules du *Coryneum gummiparum*, tout comme ceux du *C. Beyerinckii*, naissent à la face externe d'un callus traumatique.

La forme de levûre a été cherchée jusqu'ici sans succès dans la gomme arabique; ayant toutefois trouvé cette forme dans la gomme de Natal, comme on l'a vu ci-dessus, je ne doute pas qu'on ne parvienne également à constater sa présence dans la gomme arabique.

Ces observations m'ont donné la conviction que la gomme arabique pourra être produite en quantité quelconque au moyen de l'infection artificielle, de la même manière que je l'ai montré pour la gomme des Amygdalées. En outre, il ne me paraît pas impossible que le *Pleospora gummipara* se laissera cultiver dans un liquide nutritif artificiel, et qu'il pourra y transformer en gomme arabique, par une action enzymotique, la fécule ou d'autres modifications de la cellulose.

La question de savoir s'il y a encore d'autres parasites, vivant sur l'Acacia, qui puissent déterminer l'excrétion de gomme, doit, à ce que je crois, être résolue négativement; de mes expériences sur le *Coryneum Beyerinckii*, ci-dessus décrites, il semble en effet résulter, d'abord, que le pouvoir infectant n'appartient même pas à tous les différents *états de végétation* sous lesquels ce parasite peut se présenter, et, en second lieu, qu'une forme voisine, le *Cladosporium herbarum*, introduite dans le tissu vivant de branches de pêcher, est complètement inactive.

Contraires à cette manière de voir sont les observations de deux autres auteurs, qui, si elles sont bien interprétées, sembleraient prouver, combinées avec mes propres résultats, que la désorganisation gommeuse est la conséquence d'une condition morbide que toute espèce de parasite peut provoquer et qui ne serait pas nécessairement due à une espèce particulière.

Voyons ce qu'en dit M. C. Martins [1]), l'un de ces deux

[1]) *Sur un mode particulier d'excrétion de la gomme arabique produite par l'Acacia Verek du Sénégal*, dans: *Comptes rendus*, 1875, I, p. 607.

auteurs. Ce savant avait reçu du poste de Dagana, situé à 102 kilomètres de l'embouchure du Sénégal, seize branches gommifères d'*Acacia Verek*, rapportées par les Maures Trarza, qui récoltent la gomme; sur huit de ces branches il y avait un parasite, que M. Martins nomme *Loranthus senegalensis*: „C'est à la base de l'empâtement entre lui et le bois de l'Acacia que l'exsudation gommeuse a lieu et, dans mes échantillons, elle est plus abondante que celle qu'on remarque sur les branches exemptes de parasite."

M. Solms Laubach [1]), en second lieu, a également observé et figuré, dans le bois d'une plante nourricière non spécifiée, la métamorphose en gomme sous l'influence du contact avec les rhizoïdes d'une Loranthacée, probablement le *Strutanthus elegans* Eichler, récoltée par M. Warming près de Lago-santa, au Brésil. De même que chez les Cuscutes, les suçoirs du parasite en question donnent naissance à des cellules piliformes, qui disjoignent avec force les élements ligneux de la plante hospitalière. „Cette attaque énergique provoque une désorganisation gommeuse du tissu ambiant, désorganisation qui se propage ensuite de divers côtés, creusant des cavités et des conduits irréguliers dans le bois nourricier, dont toutes les membranes se fondent en une masse gommeuse jaune et limpide. A son tour, cet effet favorise la croissance du parasite, dont les cellules terminales piliformes s'allongent de plus en plus, de sorte qu'on peut parfois les poursuivre au loin, remplissant des canaux irrégulièrement flexueux, creusés dans la gomme homogène (Pl. XXV, fig 1). Les tissus corticaux de la plante nourricière sont également très enclins à la désorganisation gommeuse; eux aussi se transforment fréquemment en gomme, à partir du point où ils sont en contact avec le prolongement du suçoir."

Le même auteur a observé le fait très intéressant que, chez

---

1) *Das Haustorium der Loranthaceën und der Thallus der Rafflesiaceën und Balanophoreën*, dans *Abhandl. d. Naturf. Gesellsch. zu Halle*, Bd. XIII, Heft 3, 1875, Sep. p. 15.

d'autres Loranthacées, le tissu des suçoirs eux-mêmes peut être détruit par suite de métamorphose gommeuse [1]). „Cette gommose se produit surtout, attaquant tous les tissus et ne laissant subsister, sous forme de lames minces, que les bandes de séparation [2]), dans les suçoirs dont, par une cause quelconque, l'extrémité absorbante n'a pu atteindre le corps ligneux de la plante nourricière; elle contribue alors, pour sa part, à accélérer la destruction de l'ensemble". Le tissu de ces suçoirs consiste principalement en cellules remplies d'amidon et se résout entièrement en une gomme homogène, jaune, transparente, se gonflant fortement dans l'eau.

D'après ces données, la gomme pourrait donc apparaître aussi sous l'influence de parasites phanérogames et se former, de même que je l'ai montré pour la gomme de pêcher, tant au moyen des tissus de la plante nourricière qu'aux dépens des parasites eux-mêmes.

Ces données, toutefois, ne sont évidemment pas assez complètes pour qu'on puisse en déduire des conclusions positives; elles se prêtent à plusieurs explications différentes. Mais on ne saurait en méconnaitre le haut intérêt, et il serait à désirer que des recherches spéciales fussent faites, à cet égard, dans la patrie même des Acacias.

Pour terminer, une simple remarque encore au sujet de la gomme adragant.

J'ai rapporté de Kew deux échantillons de cette gomme, encore attachés au bois et d'origines différentes, l'un provenant de l'*Astragalus gummifer*, l'autre d'un *Astragalus* non déterminé spécifiquement. Sous le microscope, j'ai trouvé dans chacun de ces échantillons, au voisinage de l'écorce, un nombre restreint

1) *l.c.*, p. 7.

2) Ces „bandes de séparation" sont composées du tissu cortical de la plante nourricière, lequel, refoulé latéralement par les suçoirs qui s'y introduisent, est fortement comprimé et cuticularisé.

de filaments mycéliaux pourvus de cloisons transversales, et, entre les cellules corticales elles-mêmes, un réseau de ce même mycélium; quant à des spores, je n'ai pu en découvrir d'une manière certaine; çà et là il y avait bien, entre les cellules de l'écorce, des groupes de fins granules transparents, ressemblant plus ou moins à un *Torula*, mais je n'ai pu décider s'ils étaient en relation avec le mycélium, de sorte que leur origine et leur nature me sont restées inconnues. Si l'on considère que des lésions grossières faites aux Astragales, notamment par le bétail qui les foule aux pieds, sont une des principales causes occasionnelles de la formation de la gomme adragant, on sera porté à voir une certaine analogie entre la production de cette matière et celle de la gomme des Amygdalées, qui se forme également de préférence dans des plaies à guérison difficile, probablement parce que là existent les chances les plus favorables pour l'infection par les spores de *Coryneum*.

EXPLICATION DES FIGURES.

Le grossissement est indiqué, entre parenthèses, à la suite du numéro de la figure.

Planche II.

Fig. 1. (400). Différents états du *Coryneum Beyerinckii*, le parasite de la maladie de gomme des Amygdalées. *a*. Forme conidienne ordinaire, dans les pulvinules qu'on trouve sous la gomme des branches de pêcher; trois spores commencent à germer. *b*. Conidies à forme de *Cladosporium*, se trouvant à l'air libre, sur les taches bordées de rouge des rameaux de pêcher (*c k*, fig. 3), avec spores de une, deux ou trois cellules. *c*. Etat de *Fumago*, dans la gomme; au bas de la figure, on en voit naître des filaments germinatifs brun clair, à extrémités incolores; en haut, quelques cellules passent à la forme de levûre. *d*. Forme de levûre; plusieurs cellules se multiplient par bourgeonnement, ailleurs des cellules de levûre naissent de la désagrégration de filaments mycéliaux ténus et transparents. *e*. Mycélium à forme de *Chroolepus*; un des filaments mycéliaux germe, en donnant des sporidies qui rappellent celles de *Mycoderma*, sont presque semblables aux cellules à forme de levûre, mais un peu plus petites et comme celles-ci, se multiplient par bourgeonnement.

Fig. 2. (500). Filaments germinatifs d'une spore de *Coryneum Beyerinckii*, en voie de métamorphose gommeuse. En *a*, la limite de la masse de gomme née d'une même cellule est visible: en *b*, cela n'est pas le cas.

Fig 3. (26). Coupe d'un mince rameau de pêcher, âgé d'un an, fortement attaqué de la gomme, avec canaux gommifères. Un pulvinule rudimentaire de *Coryneum ck*, ressemblant à un *Cladosporium*, se trouve au centre d'une petite tache rouge du tissu tégumentaire *k w*. Dans le tissu nécrosé *a w* on voit des filaments mycéliaux; *k l* couche de liège, ne montrant pas de filaments mycéliaux; *s v* faisceau de fibres sclérenchymateuses; *b p* parenchyme à chlorophylle; *g p* canaux gommifères dans le phloème; *g k* canaux gommifères dans le bois, formés par la déliquescence de parenchyme ligneux pathologique.

Planche III.

Fig. 4. Canaux gommifères dans le fruit du pêcher-amandier, nés par déliquescence du phloème. *a*. (13). Coupe transversale du fruit, près de l'insertion du pédoncule; les faisceaux vasculaires sont tranchés en partie longitudinalement, en partie transversalement; *h a* poils du tissu tégumentaire *h w*, *b p* parenchyme chlorophyllien, *x l* faisceaux de xylème (représentés en noir), *p h* faisceaux de phloème (en gris), *g p* canaux gommifères dans la phloème (en jaune). *b*. (360). Coupe longitudinale d'un canal gommifère, dans le phloème *p h*; le xylème *x l* est composé de vaisseaux spiralés, ponctués et réticulés et de trachéides ponctuées, et touche au sarcocarpe par des cellules allongées. Dans le canal gommifère se trouve un „filament celluleux" *c d*; une cellule de phloème nage librement dans la gomme; ces cellules contiennent des gouttelettes d'une matière qui réfracte fortement la lumière, — probablement de la gomme. Le sarcocarpe est composé de cellules sphéroïdales, qui renferment des grains d'amidon enveloppés de minces couches de protoplasma vert.

Fig. 5. (400). *a*. Minces filaments mycéliaux. *b*. Forme de levûre. *c*. Vraisemblablement spores de *Coryneum*, — le tout provenant de la gomme de Natal.

Fg. 6. (500). Etat conidien corynéoïde (*Coryneum gummiparum*) du *Pleospora gummipara*, le parasite de la gomme arabique. Les spores 4-cellulaires sont à peu près dépourvues de pédicelle, et par suite sessiles sur le stroma.

Fig. 7. (500). Formes cellulaires dans l'écorce d'Acacia, au voisinage immédiat des pulvinules corynéens, des pycnides et des périthèces du *Pleospora gummipara*; on y trouve des cellules ponctuées, des fibres sclérenchymateuses, des cellules à contenu brun et des cellules cristallifères à octaèdres tétragonaux.

Fig. 8. (500). *a*. Mode d'apparition de la forme de *Fumago* du *Pleospora gummipara* dans la gomme arabique. *b*. Etat de *Fumago* mûr.

Fig. 9. *Pleospora gummipara*, le parasite de la gomme arabique. *a*. (35) Pycnide éclaté par compression; sa paroi est membraneuse, formée de pseudo-parenchyme et porte beaucoup de hyphes déliés; le contenu consiste en petites stylospores unicellulaires, d'un brun foncé. *b*. (500). Ces stylospores, à un grossissement plus fort.

Fig. 10. (500). *Pleospora gummipara*. Stylospores à 2, 3, 4, 5 et 6 cellules, provenant d'un pycnide de la seconde espèce, qui du reste est entièrement semblable au pycnide de la fig. 9*a*.

Fig. 11. (35). Périthèce de *Pleospora gummipara*. Entre les asques il y a du mucilage. Sur la paroi noire, membraneuse, pseudo-parenchymateuse du périthèce se trouvent çà et là des conidies corynéoïdes.

Fig. 12. (500). Quatre asques 8-spores d'un périthèce de *Pleospora gummipara*; dans un seul de ces asques le dessin est entièrement achevé pour toutes les 8 spores. Les spores sont ordinairement sexcellulaires, noires et à paroi épaisse. Dans l'asque à gauche on voit une spore quadricellulaire, ressemblant à une conidie de *Coryneum*, mais plus grande. Dans trois asques les spores inférieures sont quinquecellulaires.

DIPLOKNEMA SEBIFERA,

NOUVELLE SAPOTACÉE DE BORNÉO,

PAR

L. PIERRE.

Au mois d'août de cette année je reçus de M. H. C. Knappert, cultivateur à Barabay (distr. Amoentay, Ile de Bornéo), quelques rameaux. feuilles et fleurs séchées d'un arbre dont les fruits produisent, selon lui, la graisse végétale connue dans le commerce sous le nom de Minjaq Tangkawang, un article d'exportation très important. Cette graisse, employée comme aliment par les indigènes, a reçu dans l'industrie européenne une foule d'applications, en premier lieu comme huile lubrifiante pour les machines.

Ce produit, provenant en grande partie de Bornéo, était déjà connu dans le commerce anglais en 1857, lors du voyage de de Vriese, qui en a donné une description détaillée, intitulée: *Minjak Tangkawang en andere voortbrengselen van Borneo's Wester-afdeeling*, 1861.

Selon de Vriese, l'arbre producteur est une Diptérocarpée, qu'il décrit sous le nom de *Hopea macrophylla* [1]) et dont une belle figure se trouve au Musée Colonial de Harlem. Dans les dernières années on a constaté que le nombre d'espèces produisant le suif végétal est très grand dans les familles des Diptérocarpées et des Sapotacées. Selon M. Schlimmer, dans son travail sur les arbres produisant la Gutta-percha [2]), les espèces

---

1) Selon M. Pierre, une espèce de *Shorea*.

2) *Tijdschrift van Nijverheid*, livr. d'avril 1883, p. 97.

de *Dichopsis* produisent en même temps dans leurs fruits une graisse assez semblable au Minjaq Tangkawang, et ce serait là un fait très important pour la question de la culture de ces arbres, qui paraît éminemment urgente à cause de l'exploitation déréglée qu'en font les indigènes.

M. Pierre, qui se trouve actuellement à Leyde, a eu la bonté de déterminer les exemplaires reçus de M. Knappert ainsi que quelques graines envoyées plus tard, et m'a autorisé à publier le résultat de son examen dans une revue scientifique néerlandaise.

F. W. VAN EEDEN,

HARLEM, Déc. 1883. *Directeur du Musée Colonial.*

DIPLOKNEMA,

GEN. NOV.

Sepala 5, subaequilonga, 2 exterioribus, mox valvatis, interiora imbricata dorso carinata, ad marginem membranacea ciliata includentibus. Corolla lobis saepissime 10, imbricatoconvolutis, tubo lato 3—4 plo longioribus, sepalis æquilongis. Stamina sterilia 16—20, tubo sub 1—seriatim adnata, exteriora paululo longiora corollae lobis alterna, petaloidea, laminis lineari-oblongis, complanatis apici emarginatis, vel rotundatis. Staminodia 0. Discus hypogynus, pulvinatus, sulcatus. Ovarium 6—8 saepius 7 loculare, villosum. Stylus subulatus, tubulosus, sub anthesin paululò exsertus, sulcatus, infra medium villosus, stigmate minuto 6—8 lobo, lobis incurvis. Ovula in quoque loculo solitaria, sub apice inserta, adscendentia amphitropa. Fructus: Pericarpium? Semen magnum, hilo latissimo orbiculari, tegumento necnon crasso, sublignoso, coriaceo, intus rugoso sub ruminato. Albumen 0. Cotyledones oblongae plano-convexae ad marginem tortae carnosae, intus leviter depressae vel oblique applicatae. Radicula brevis infera.

Arbor magna? cultura digna. Ramuli crassi. Folia ad apices ramulorum conferta, alterna. Stipulae? Flores polygamo-dioïci, numerosi ad axillas defoliatas vetustioresque umbellati. Pedunculi breves, ferrugineo-tomentosi. Ex seminibus, coctione, materia sebacea extrahitur fide Knappert et van Eeden.

Exemplar incompletum legit Knappert ad Barabay in insula Borneensis. Genus etsi imperfecte cognitum, bene distinctum videtur. Bassiae potius quam Payenae affine, a priore differt imprimis corollæ tubo brevi, staminum seriebus indistinctis vel necnon semotis, disco hypogyno pulvinato, stylo non elongato; a Payena foliorum venatione inflorescentia, stylo et ovario; ab utraque ob numerum sepalorum floresque polygamos, in ordine rarissime observatos. Tamen in Bassia butyracea, sepala 5 adsunt, sed haec a speciebus normalibus, corolla et staminibus sepalis longioribus notisque aliis generice dubia remanet.

DIPLOKNEMA SEBIFERA.

Ramuli adulti glabri, grisei. Folia (cum petiolo basi incrassato 2—4 cent. ½ longo), 10—24 cent. longa, 3—7 cent. ½ lata, elliptice oblonga, subobovata, breve acuminata, obtusa, basi angustata, subacuta vel rotundata, glaberrima, coriacea, costulis 28—30 adscendentibus semotis, nervis transversalibus undulato-parallelis (Dichopseos more). Sepala 4 mm ½ alta, 3 mm lata, elliptica, rotundata, crassa, intus vix pubescentia, dorso fulvo tomentosa, interiora tamen dorso ad carinam exceptam glabra, ciliata. Corollae lobi basi angustati apici rotundati, marginibus denticulatis apice pubescentibus, (cum tubo glabro 1 mm alto) 4 mm ½ longi. Stamina sterilia supra tubum breviter angustata dorso pubescentia, apice rotundata vel emarginata, raro pilosa, 3 mm ½ alta. Discus glaber ¼—½ mm elevatus. Ovarium cum stylo superne glabro 5 mm ½ altum, loculis apice apertis vel dissepimentis destructis.

PIERRE.

LEYDE, novembre 1883.

LÉGENDE DU DIPLOKNEMA SEBIFERA PIERRE.

Pl. IV.

1. Fleur après l'anthèse. $\frac{10}{1}$.
2. Sépale de la série extérieure, vu du côté intérieur. $\frac{10}{1}$.
3. Fleur plus jeune, mais près de l'anthèse, réduite à sa corolle. Le tube est court, comme dans les Payena. $\frac{10}{1}$.
4. La corolle est présentée du côté intérieur. On y voit les 2 séries de staminodes libres à partir du sommet du tube (*t*). Leur filets sont soudés au tube et, quoique insérées à la même hauteur, les séries sont distinctes, l'une, la plus intérieure, (comme dans les Bassia) opposée aux lobes de la corolle. Les filets dans leur partie adnée au tube s'impriment en sillons sur le disque hypogyne (*d*), qui est à peu près de même hauteur que le tube de la corolle. L'ovaire (*o*) est sessile sur le disque. Son style, velu comme lui jusqu'au dessous du milieu, est un tube divisé en 6—8 lobes stigmatiques au sommet, correspondant aux divisions de l'ovaire. $\frac{10}{1}$.
5. Les figures *a*, *b*, donnent, la première une forme de staminode vue du côté intérieur, et la seconde une autre forme du même corps, vue du côté extérieur. Ces étamines *stériles* ont la forme de certaines étamines *fertiles* de Payena.
6. Coupe longitudinale de la même fleur, dont l'ovaire à 8 loges uniovulées. Les cloisons des loges sont presque nulles au sommet. $\frac{10}{1}$.
7. Coupe transversale d'un ovaire à 8 loges. Le nombre le plus constant de ces loges est de 7. On en trouve le plus souvent 8 au lieu de 6. Ce caractère variable du nombre des loges est celui des Bassia et des Kakosmanthus. $\frac{10}{1}$.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

SUR LES PERTURBATIONS DE L'AIGUILLE AIMANTÉE,

PAR

C. H. D. BUYS BALLOT [1]).

J'ai entrepris quelques recherches sur les perturbations magnétiques, dans l'espoir de décider si ces perturbations, suivant qu'elles se produisent simultanément sur toute la surface de la Terre, ou qu'elles restent circonscrites dans des limites plus étroites, peuvent être attribuées à des causes différentes. Quoique cette étude n'ait pas fourni des résultats bien nets, l'exposé des considérations qui m'y ont guidé et des méthodes dont j'ai fait usage ne sera peut-être pas dépourvu de tout intérêt.

Il n'est pas besoin de rappeler comment les illustres fondateurs de la doctrine du magnétisme terrestre, von Humboldt et Gauss, ont immédiatement reconnu la condition essentielle des progrès futurs de cette jeune science. Des séries d'observations doivent être continuées longtemps et régulièrement en quelques stations convenablement choisies quant à leur situation, et de plus, en

[1]) Extrait d'une communication faite, en 1862, à la Société des arts et des sciences d'Utrecht (*Aanteekeningen van het verhandelde in de Sectie-Vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen*, 1862, p.6).

ces mêmes stations et en d'autres, doivent avoir lieu des observations simultanées, exactement simultanées. Ces observations faites à des jours déterminés confirment la présomption, déjà émise antérieurement, que pendant les aurores boréales l'aiguille aimantée éprouve des perturbations sur de très vastes espaces, et cela au même instant. Les annuaires météorologiques sont là pour le démontrer. Le mouvement de l'aiguille de déclinaison est représenté, graphiquement, par des courbes entièrement semblables dans leur marche. Le terrain embrassé par ces observations semble passablement grand, mais pourtant, jusqu'ici, il est presque borné à l'Europe; or, même pour l'intelligence des phénomènes météorologiques ordinaires, l'Europe n'est pas un champ suffisant. J'en ai déjà fait la remarque il y a bien des années, notamment en 1850, dans les considérants d'une question mise au concours par la Société scientifique d'Utrecht. Une seule année d'observations simultanées sur toute l'étendue de la Terre, en des lieux bien choisis, peut avoir plus d'utilité que ces innombrables chiffres recueillis en des points ici beaucoup trop rapprochés, là beaucoup trop distants les uns des autres. La condition signalée n'est toutefois pas facile à remplir, et surtout ne l'était pas autrefois. Aussi a-t-on bientôt renoncé à faire, à certains jours déterminés, de cinq en cinq minutes, des observations simultanées; l'étude des phénomènes n'a été régulièrement poursuivie que dans quelques observatoires, et, parmi ceux-ci, il y en a bien peu où la position de l'aiguille aimantée ait été notée d'une manière continue. Quelques-uns donnent les valeurs d'heure en heure, d'autres toutes les deux heures, d'autres encore, trois fois par jour. D'ailleurs, *trois* données pour chaque aiguille, chaque minute, comment inscrire tout cela? Maintenant déjà, il y a des millions de chiffres superflus, car on ne les met pas en œuvre. Si l'on se décide à les imprimer, le meilleur mode paraît être celui adopté à Greenwich. Là, on ne publie que les positions extrêmes atteintes à chaque oscillation, avec le temps précis du rebroussement; la position correspon-

dant à un instant quelconque peut alors être trouvée, par interpolation, avec une exactitude suffisante. Ce procédé, toutefois, a aussi ses inconvénients, aucun nombre n'étant obtenu sans calcul. Plus tard, on a eu recours à la photographie, et dans les établissements où elle est appliquée on a maintenant, pour chacune des trois constantes du magnétisme terrestre, une courbe continue et par conséquent leur valeur à chaque instant. Il est à souhaiter que ces établissements se multiplient et que, aux investigateurs qui voudront se livrer à des recherches concernant les jours où il s'est passé quelque chose de particulier, l'occasion soit offerte de se procurer, pour un pareil jour, une copie des photographies obtenues sur toute la Terre. Dans l'étude dont j'ai à rendre compte, le besoin d'un semblable secours s'est vivement fait sentir; sans lui, il est impossible de donner une réponse certaine à la question posée.

Cette question est toutefois soulevée de divers côtés, et dès à présent on peut au moins en préparer la solution; plusieurs savants en ont même déjà proposé une solution, qui probablement est inexacte et à coup sûr incomplète. A quoi sont dues les perturbations de l'aiguille aimantée? Aux perturbations dans l'équilibre de l'électricité de la Terre, répond M. Lamont, dans son ouvrage: *Der Erdstrom*. Etudiant les courants qui apparaissent dans un fil métallique reliant deux plaques enfoncées dans le sol, M. Lamont se rendait indépendant des actions chimiques en opérant à la fois sur plusieurs couples de plaques, dont les éléments étaient placés à des distances différentes, et en n'attribuant au courant terrestre que ceux des courants observés au galvanomètre qui étaient simultanés dans les fils de même direction. Il obtenait ainsi des courants dérivés du courant terrestre primaire, et comme l'un des systèmes de plaques était disposé dans le méridien magnétique, un autre dans un plan perpendiculaire au méridien, il pouvait étudier séparément les courants qui changeaient la déclinaison et ceux qui modifiaient l'intensité horizontale. Renvoyant pour les détails à l'ouvrage cité, nous nous

contentons de rappeler ici la conclusion de M. Lamont: les courants ne produisent pas directement les perturbations des aiguilles, mais ils modifient, en direction et en intensité, le magnétisme de la Terre. Ces perturbations doivent donc se manifester sur toute la surface du globe, et cela à peu près au même instant.

Un peu différente est l'opinion de M. le Dr. Lloyd, de Dublin [1]). Ce savant a comparé les courants terrestres, jadis observés par Barlow dans les lignes Derby-Rugby et Derby-Birmingham, avec les mouvements simultanés de l'aiguille aimantée à Greenwich, c'est-à-dire, avec les déviations que l'aiguille avait présentées par rapport à ses positions moyennes pour l'heure et le mois considérés. Comme résultat de cette comparaison, M. Lloyd trouve entre lesdits courants et mouvements une correspondance parfaite; seulement, les mouvements accessoires de l'aiguille sont, à Greenwich, un peu plus petits. Les tracés graphiques donnés dans son Mémoire légitiment, à mon avis, cette conclusion, qui n'est nullement ébranlée par la circonstance que l'accord est moindre entre les courants terrestres Derby-Rugby et les mouvements accessoires de l'aiguille à Munich; M. Lamont, à la vérité, se fonde sur cette circonstance pour rejeter la conclusion du savant anglais; mais, à ce moment, il n'avait pas encore pu prendre connaissance des détails de son calcul. M. Lloyd remonte ensuite, des perturbations de l'aiguille aimantée à Greenwich et en d'autres lieux, aux courants terrestres dans le voisinage de chacun de ces lieux: par le calcul des composantes et de leurs intensités, il arrive à représenter ces courants comme ayant à chaque heure un autre azimut et une autre intensité. Ils paraissent alors parcourir l'horizon, et on peut en dresser pour chaque lieu une espèce de rose, faisant

---

1) Rev. Humphrey Lloyd, *On eart-currents and their connexion with the diurnal changes of the horizontal needle. Transactions of the R. Irish Academy*, XXIV Science).

connaître quelles sont pour ce lieu, à une heure donnée du jour, l'intensité et la direction moyennes du courant. Dans les deux hémisphères, le courant suit le cours du *soleil*. En outre, les intensités et les vitesses angulaires ne sont pas partout les mêmes dans les mêmes azimuts, mais elles dépendent, suivant M. Lloyd, de la direction des montagnes voisines ou de l'extension de la terre ferme. Selon lui, il s'agirait donc plutôt de courants et d'influences bornés seulement à un certain espace.

C'est dans un sens encore plus restreint que les courants sont conçus par l'astronome P. Secchi [1]). Celui-ci regarde les perturbations de l'aiguille comme étroitement liées aux variations atmosphériques, et il croit, même lorsque le ciel est serein et le temps en apparence au beau fixe, pouvoir prédire, à Rome, de la pluie et du vent, d'après des variations de l'intensité magnétique ou d'après des perturbations considérables des deux autres constantes. Peut-être a-t-il été impressionné outre mesure par le grand changement de temps survenu en septembre 1859, peu après les fortes perturbations magnétiques qui se sont fait partout ressentir. Moi aussi j'ai fait précédemment quelques recherches au sujet d'une semblable liaison, entendue toutefois dans un sens plus large. Je crus avoir trouvé qu'à l'époque où le soleil et la lune nous envoient le plus de chaleur, la déclinaison éprouve les changements les plus considérables, et j'essayai aussi de démêler si de grandes variations de température, s'étendant à de vastes espaces, ou bien des oppositions prononcées, soit entre l'est et l'ouest, soit entre le nord et sud, étaient en rapport avec des mouvements simultanés étendus de l'aiguille de déclinaison. Plus tard, M. le Dr. Krecke trouva effectivement, mais seulement d'après une

---

[1]) Voir différentes Notes de ce savant, avec le plus de détails dans le *Bulletino meteorologico dell' observatorio del Collegio Romano*, publié grâce à la munificence du Prince Buon Compagno.

[2]) Voir, à ce sujet, Loomis dans le *Journ.* de Silliman, Balfourt Steward dans *Philos. Transactions*, 1861, p. 423.

courte période, — de sorte que la coïncidence pourrait être purement fortuite, — qu'aux dates des perturbations le St. Bernard avait toujours, par rapport au reste de l'Europe, la température la plus basse. Bien que j'eusse volontiers poursuivi cette étude, — ce qui montre qu'une connexion entre la distribution du temps et le mouvement de l'aiguille aimantée ne me paraît pas improbable, — j'ai pourtant élevé quelques objections contre les vues de M. Secchi, qui me semblait admettre une connexion trop intime et renfermée dans des limites trop étroites. M. Secchi, toutefois, ne s'est pas rendu à ces arguments, et il ne regarde pas non plus comme décisives les objections formulées par M. Allan Broun; il croit donc, car cela est impliqué dans sa conception, que les perturbations magnétiques sont locales. Tous les jours, en effet, le temps change quelque part sur la Terre, et si, en un lieu donné, un changement de temps correspond à une perturbation, mais qu'il n'y ait pas des perturbations tous les jours, c'est que celles-ci ne s'étendent pas à la Terre entière. Indubitablement, les perturbations se produisent toujours sur des espaces plus grands qu'on ne serait conduit à le croire d'après l'opinion de M. Secchi.

Enfin, une hypothèse a été énoncée qui doit faire admettre l'absolue généralité du phénomène. Les recherches de M. Kreil, du général Brisbane, de M. Sabine et de moi-même [1]) ont péremptoirement démontré que la Lune exerce une action magnétique sur la terre. Quelques-uns attribuent aussi une pareille action au Soleil, non seulement une action indirecte, par la chaleur de l'astre, mais en outre une action directe, analogue à celle d'un aimant sur un autre aimant. La période trouvée par M. Lamont dans les variations diurnes de l'aiguille aimantée, et qui est ordinairement dite décennale, bien que M. Wolf, de Berne, lui donne une durée de 11 ans $\frac{1}{9}$, — durée égale, chose

1) *Aanteekeningen van het Verhandelde in de Sectie-Vergaderingen van het Prov. Utrechtsch Genootschap*, 1853, p. 54.

assez étrange, à celle de l'année de Jupiter, — cette période, dis-je, est considérée par M. Wolf et M. Sabine comme étant en rapport avec une période de même longueur, et concordante quant au temps du maximum et du minimum, dans le nombre des taches solaires. Il me semble que, pour trancher cette question, il faudra une série d'observations plus longue que celle dont on peut disposer aujourd'hui, même après les efforts méritoires de M. Wolf et de M. Schwaabe. Tandis que M. Lamont défend la durée de 10 ans et M. Hansteen celle de 11, je crois encore pouvoir prouver, avec le même degré de probabilité, aussi bien l'une que l'autre de ces durées, tant pour les taches solaires que pour les variations diurnes de la déclinaison de l'aiguille aimantée; en fait, une distribution des taches solaires, d'après chacune de ces deux périodes, a été communiquée par moi à M. Wolf et peut facilement être extraite de ses *Mittheilungen über die Sonnenflecken.* Il n'est pas facile de démontrer que deux périodes sont connexes. Certaines périodes de la vie humaine n'ont-elles pas été regardées aussi comme dépendantes du cours de la Lune, et les médecins ne reviennent-ils pas de plus en plus de cette idée, parce qu'il n'y a pas accord *parfait*, — car telle est la condition nécessaire, — ni quant à la durée, ni (on pourrait ajouter „par conséquent") quant à *l'époque* chez des individus différents? Mais d'un autre côté, en présence de l'incertitude qui règne au sujet de l'inégalité des périodes, il n'est pas non plus permis de nier à priori qu'un rapport existe entre les taches solaires et les mouvements magnétiques, et je respecte donc volontiers l'opinion que M. Sabine et M. Wolf ont simultanément émise. J'avais même dû lui reconnaître une grande probabilité lorsque l'observation de M. Carrington fut communiquée par le général Sabine pour la première fois, dans une lettre; il est vrai qu'ensuite, dans les Annales de Poggendorf, il s'exprima en termes un peu atténués, et, plus tard, d'une manière encore moins formelle. Pourquoi les appareils photographiques de l'Angleterre, pays qui fait tant pour le magnétisme terrestre, autant, pourrait-on dire, que tous

les autres ensemble, pourquoi ces appareils ne donnent-ils pas des observations plus multipliées? Si elles étaient plus nombreuses, tout doute cesserait et, en constatant la connexion entre les variations brusques des taches solaires et les perturbations dans les mouvements de l'aiguille, on aurait en même temps reconnu que ces perturbations doivent être simultanées pour la Terre entière. Seulement, la position de l'horizon d'un lieu, au moment donné, pourrait faire qu'en ce lieu elles ne soient ressenties qu'à un faible degré.

Différentes considérations théoriques, on le voit, font désirer de connaître plus exactement ces perturbations et leurs causes. Non moins vif est l'intérêt que cette connaissance présente pour la pratique. Dans les lignes télégraphiques, en effet, il se produit également des perturbations, si fortes qu'on ne peut plus transmettre de signaux, à moins de disposer de deux fils entre les mêmes stations et de faire revenir le courant, non plus par la terre, mais par le second de ces fils. Grâce à cette combinaison, le bureau d'Amsterdam a pu, même au commencement de septembre 1859, échanger des signaux avec Londres. Les courants provoqués par les orages qui passent au-dessus des fils sont déjà un embarras pour la télégraphie, et les aurores boréales rendent la transmision des dépêches impossible sur de grandes parties de l'Europe. D'autres courants telluriques intenses sont-ils en relation avec des aurores boréales produites de jour et par suite non visibles, sauf peut-être, de temps en temps, à l'orientation des nuages? Quand naissent les courants telluriques? Sont-ils réellement, comme le croit M. Lloyd, synchrones avec des perturbations de l'aiguille aimantée, ou bien cela n'est-il le cas que pour les courants d'une certaine espèce, tandis que d'autres reconnaissent une origine différente? Sont-ils fréquemment limités à des lieux déterminés, comme M. Sabine l'admet pour Point-Barrow, ou sont-ils généraux sur la Terre, ainsi qu'il dit également l'avoir constaté maintes fois?

Telles sont les questions que j'aurais voulu résoudre, entre

autres dans l'espoir, comme je l'ai indiqué en commençant, de pouvoir assigner aux perturbations, suivant la manière dont elles se produisent, des causes différentes.

Pour cette recherche, je disposais du trésor d'observations recueilli pendant plusieurs années, suivant le plan du général Sabine, sur les ordres du Gouvernement britannique, à Toronto, à St.-Hélène, au Cap de Bonne-Espérance et à Hobarton; de 1843 à 1846 ces observations ont été simultanées, c'est-à-dire, faites les mêmes jours, car, ayant eu lieu partout à l'heure locale pleine, elles ne sont pas simultanées d'après l'heure de Göttingen, mais peuvent différer entre elles d'une demi-heure. Toutes ces observations ont dû être calculées de nouveau. Dans ses registres, le général Sabine aura probablement bien noté lui-même les perturbations, chacune à son heure, de manière à pouvoir juger assez facilement lesquelles étaient simultanées, lesquelles ne l'étaient pas; mais, ces registres, je ne les avais pas et je dus donc les refaire. Cela me semblait d'ailleurs préférable, les perturbations devant, à mon avis, être triées et appréciées avec plus de rigueur scientifique qu'elles ne l'ont été jusqu'ici. Ce perfectionnement de la méthode d'étude aura probablement dans d'autres occasions plus d'importance que dans celle-ci, où, grâce au tact et à l'expérience d'un savant tel que M. Sabine, le but n'en a pas moins été atteint, ou du moins approché de très près.

La sûreté de son coup d'œil, exercé par le long maniement des chiffres, fit immédiatement reconnaître à M. Sabine que les fortes perturbations suivaient, dans leur distribution sur la journée, une autre loi que les petites, et il crut en conséquence devoir épurer ses observations, en séparant et traitant à part les perturbations qui avaient une certaine valeur, le double de la valeur moyenne. Il obtint ainsi un certain nombre de moyennes. De nouveau il appliqua le procédé d'épuration. Cela lui donna ses moyennes définitives et, séparément, les observations maintenant reconnues pour perturbations. Celles-ci étaient, en effet,

autrement distribuées sur les heures du jour et de la nuit. A différentes reprises il s'assura même si la limite avait été à peu près atteinte, en extrayant encore une fois des observations les perturbations plus faibles d'une minute et en les joignant aux perturbations obtenues précédemment; mais il n'en continua pas moins à craindre de n'être pas encore arrivé à la limite exacte.

Or, cette limite exacte, je la trouve immédiatement, d'une autre manière. J'ai pris les moyennes de toutes les observations faites à une même heure dans un mois donné, et j'ai appliqué ma méthode des déviations. Toutes les observations ont ainsi été obtenues sous la forme de déviations pour chaque heure du jour, les déviations positives et négatives séparées les unes des autres. Ensuite, j'ai simplement compté, pour chacune de ces deux espèces de déviations, combien il y en avait, à chaque heure, de zéro à une division de l'échelle, combien de une à deux divisions, de deux à trois, de trois à quatre, etc. De ces nombres il devait ressortir si les petites perturbations obéissent à une autre loi que les grandes, et, en cas d'affirmative, où se trouve la démarcation entre les unes et les autres.

Comme exemple de l'application de cette méthode, je donne ici, dans le tableau A, une partie des chiffres obtenus pour Toronto.

(Tab. p. 117.)

Ce tableau ne contient que les quatre classes de déviations de 3 à 4, de 4 à 5, de 5 à 6 et de plus de 6 parties de l'échelle, parce que c'est dans cet intervalle que tombe la limite. La première colonne indique l'heure de Toronto à laquelle les déviations se rapportent, les huit colonnes suivantes donnent le nombre des déviations, alternativement celui des déviations positives et négatives.

En considérant les colonnes affectées de +, on s'aperçoit bientôt que dans les deux premières les nombres les plus forts se trouvent en haut, les plus faibles en bas. Par contre, dans la dernière colonne +, les nombres les plus forts occupent évidemment la moitié inférieure. Pour les colonnes affectées de —,

A. PERTURBATIONS DE L'AIGUILLE DE DÉCLINAISON

à TORONTO, EN PARTIES DE L'ÉCHELLE.

HEURES.	DE 3—4.		DE 4-5.		DE 5—6.		DE 6—	
	+	—	+	—	+	—	+	—
0	40	37	28	22	17	13	22	34
1	57	34	20	18	17	14	26	23
2	51	39	38	20	16	9	12	36
3	74	36	26	23	22	16	2	32
4	56	39	34	24	30	13	8	39
5	59	48	33	25	15	15	17	28
6	55	49	31	37	10	12	12	32
7	48	47	19	30	16	21	9	19
8	37	53	22	26	5	4	9	20
9	54	48	21	19	7	19	2	19
10	33	21	11	24	10	10	8	24
11	20	24	19	9	6	10	10	18
12	33	20	16	17	6	9	22	16
13	24	32	17	12	11	8	36	17
14	21	57	13	20	18	6	52	17
15	32	74	29	19	16	17	73	14
16	26	78	25	26	25	7	69	11
17	36	55	31	17	21	6	45	11
18	32	50	16	22	16	9	64	18
19	27	49	23	16	14	9	48	28
20	32	43	20	23	14	15	39	25
21	34	31	29	22	16	22	32	31
22	40	35	30	16	14	19	26	32
23	37	25	31	22	16	17	37	38

c'est l'inverse. L'opposition s'accuse encore plus distinctement dans les différences entre les nombres correspondants de chaque paire de colonnes.

B. EXCÈS DU NOMBRE DES PERTURBATIONS POSITIVES SUR LE NOMBRE DES PERTURBATIONS NÉGATIVES, ET SOMMES DE TOUTES LES DÉVIATIONS.

HEURES.	DE 3-4.	DE 4-5.	DE 5-6.	DE 6+.	DE 3-5.	DE 5 ET PLUS.	SOMMES. DE 3-5.	SOMMES. DE 5 ET PLUS
0	3	6	4	— 12	+ 9	— 8	127	86
1	2	2	3	3	4	6	129	80
2	12	18	7	— 24	30	— 17	148	72
3	38	3	6	— 23	41	— 17	159	72
4	17	10	7	— 31	27	— 24	157	90
5	11	8	0	— 11	19	— 11	165	75
6	6	— 6	— 2	— 20	0	— 22	172	66
7	11	— 11	— 5	— 10	0	— 15	144	65
8	— 16	— 4	+ 1	— 11	— 20	— 10	141	38
9	6	2	— 12	— 17	8	— 29	142	47
10	12	— 13	0	— 16	— 1	— 16	90	52
11	4	10	— 4	— 8	14	— 12	72	44
12	13	— 1	— 1	6	12	+ 5	86	51
13	— 1	5	3	19	— 3	22	77	72
14	— 36	— 7	12	35	— 43	47	111	93
15	— 42	+ 10	— 1	59	— 32	58	154	120
16	— 52	— 1	8	58	— 53	66	155	142
17	— 19	+ 14	15	34	— 5	49	132	83
18	— 18	— 6	7	46	— 24	53	120	107
19	— 22	7	5	20	— 15	25	108	109
20	— 11	— 3	— 1	14	— 14	13	118	93
21	3	7	— 6	1	+ 10	— 5	113	101
22	5	14	— 5	— 6	19	— 11	121	91
23	12	9	— 1	+ 2	21	+ 1	115	105

Dans ce second tableau, B, la première colonne contient l'heure, les quatre suivantes la différence en plus du nombre des déviations positives sur celui des négatives. Dans la colonne 6 sont additionnés les nombres relatifs aux deux premières classes de déviations, dans la colonne 7, ceux qui proviennent des deux autres classes; dans la colonne 8 j'ai inscrit les sommes des déviations, tant positives que négatives, des deux premières classes, tandis que toutes les déviations de 5 à 6 et au-delà sont ajoutées ensemble dans la 9ième colonne, attendu que la distribution des déviations appartenant aux différentes classes présente moins d'inégalité que n'en montrent les différences entre les déviations positives et négatives. On voit que, à Toronto, il y a une opposition évidente entre les déviations qui ne dépassent pas 5 parties de l'échelle et les déviations dont la valeur est plus grande. De la même manière, on reconnaît que pour Hobarton la limite se trouve à environ trois parties de l'échelle, pour le Cap de Bonne-Espérance et pour St.-Hélène à environ deux. Je dis „environ"; car, si l'on peut distinguer deux classes de déviations, il y a pourtant des passages de l'une à l'autre, ne fût-ce que parce qu'il n'a pas été tenu compte de l'influence de la lune et que les moyennes ne sont donc pas disposées suivant toutes les périodes connues; de ce chef, la moyenne aurait dû subir çà et là, mais à des heures différentes, un changement d'une demi-partie de l'échelle, en plus ou en moins. Si les observations portaient sur un plus grand nombre d'années, il faudrait aussi les étudier séparément pour les différentes saisons, ou même pour les différents mois, car la limite des classes pourrait très bien varier un peu avec les époques de l'année.

J'ai reconnu que les déviations ne peuvent être partagées qu'en deux groupes, que, par exemple, les déviations de valeur moyenne ne suivent pas une autre loi de distribution que les petites et aussi une autre loi que les grandes. D'après cette base, il n'y a donc certainement pas plus de deux classes de déviations. On ne peut même conclure, de l'opposition des lois

de distribution, à l'existence de deux causes différentes, l'une pour les déviations plus fortes, l'autre pour les déviations plus faibles. J'ai en effet déjà démontré, dans mes *Changements périodiques de température*, 1847, que les écarts que la température atmosphérique présente par rapport à son état moyen sont également, en hiver, autrement distribués qu'en été. Les grands écarts, de sept, huit degrés, ou plus, se produisent en hiver plus fréquemment dans le sens négatif, en été plus fréquemment dans le sens positif; et pourtant, dans les deux saisons, la cause de perturbation est la même, savoir, l'incidence de vents autres que les vents moyens. Pour établir des causes différentes à l'aide des phénomènes seuls, — bien entendu, il en serait tout autrement si l'on savait à priori que tantôt telle cause et tantôt telle autre exerce une action prépondérante, — j'ai cherché un nouveau critérium en rapport avec les considérations exposées au début de cette communication. On peut, en effet, se demander: certaines classes de déviations sont-elles générales pour toute la Terre, d'autres bornées à l'une de ses parties? On a le plus de chances de trouver la réponse à cette question en s'adressant aux déviations les plus fortes, car les petites ne peuvent être reconnues. Partout et toujours, en effet, il y a des déviations, et le seul caractère qui serait décisif, à savoir que les déviations simultanées fussent partout positives ou partout négatives, ou que les déviations positives dans un hémisphère correspondissent toujours à des déviations négatives dans l'autre hémisphère, ce caractère, dis-je, ne ressort pas de l'examen des observations. Il ne pourrait d'ailleurs être constaté qu'au moyen de registres photographiques, lesquels révèlent les oscillations des aiguilles, et qui permettraient de rattacher les unes aux autres les déviations et oscillations exactement simultanées.

Bien que, dans les vingt dernières années, quelques-unes des questions précédentes aient reçu une solution au moins partielle

ou aient dû être modifiées, j'ai cru pouvoir reproduire jusqu'ici mon Mémoire de 1862, parce qu'il me semblait utile d'insister un peu sur la méthode du triage des observations, avant que le Congrès international, qui se réunira prochainement à Vienne, soit appelé à se prononcer sur cette méthode.

La dernière partie de mon Mémoire, dans laquelle je montrais, au moyen de tableaux numériques, que dans les quatre stations précitées, Toronto, St.-Hélène, le Cap et Hobarton, il arrive fréquemment, mais non pas toujours, que des perturbations se produisent le même jour, — cette dernière partie était nécessaire à cette époque, parce qu'aucune comparaison aussi générale des observations n'avait encore été publiée; mais il serait superflu de la reproduire maintenant que le vœu ci-dessus énoncé, au sujet de l'inscription photographique, c'est-à-dire continue de la marche des instruments magnétiques, se trouve réalisé. A peine l'observatoire d'Utrecht était-il entré, en 1867, en possession de ces appareils inscripteurs, que j'ai donné, dans les Annuaires de 1868 et 1869, les perturbations simultanéès, à certains jours, pour quelques stations; il y a une couple d'années, une Commission s'est formée en Angleterre, qui s'occupe de faire reproduire et de réunir l'un à côté de l'autre un certain nombre de pareils tracés photographiques; en outre, de temps en temps, on adresse des épreuves de ces reproductions à M. le Dr. Whipple ou à M. le prof. Wild. Sous ce rapport, il y a donc lieu d'être satisfait.

En ce qui concerne toutefois la méthode à adopter pour la mise en œuvre des matériaux, l'accord n'est pas encore fait, et pourtant on sait déjà, par les belles observations de M. Wijkander, que souvent des perturbations ne s'étendent que sur un espace borné et sont d'une autre nature que celles qui se font sentir à des distances plus grandes.

Maintenant surtout, après l'expédition polaire internationale, pendant laquelle les observatoires fixes ont également, aux jours et heures convenus, observé sans interruption, on a à considérer

un si grand nombre de stations, qu'il est de la plus haute importance de s'entendre sur la manière dont les observations doivent être calculées et combinées.

Dans ce qui précède, j'avais proposé de calculer les écarts à l'indication moyenne déduite de toutes les observations; peut-être est-il plus simple, et n'en résultera-t-il pas une grande différence, de déduire la marche normale des observations relatives à des jours qui paraissent exempts de perturbations. Sans doute, il restera alors encore quelque chose d'arbitraire, en tant qu'il s'agit de décider si tel ou tel jour doit être regardé comme régulier; mais, néanmoins, il y a beaucoup à dire en faveur de cette simplification.

Quant au fond de la méthode ci-dessus proposée, je n'ai rien à y changer. Les déviations doivent être réparties en classes, d'après leur grandeur; pour chaque classe séparément il faut examiner comment marchent ces déviations, afin de découvrir, par comparaison, quelles classes affectent une certaine allure, quelles autres une allure différente; c'est ainsi que doit être cherché où se trouve la limite; rien n'autorise à fixer celle-ci d'avance, d'une manière arbitraire.

LE PHÉNOMÈNE DÉCOUVERT PAR HALL

ET LA

ROTATION ÉLECTROMAGNÉTIQUE DU PLAN DE POLARISATION DE LA LUMIÈRE,

PAR

H. A. LORENTZ.

---

§ 1. Partant de l'idée que peut-être un aimant n'agirait pas seulement sur le conducteur d'un courant électrique, mais aussi *directement* sur le courant lui-même transmis par ce conducteur, M. Hall, de Baltimore, a fait, en 1879, une découverte importante [1]). Après quelques expériences qui n'avaient conduit à aucun résultat, il plaça une mince feuille d'or, fixée sur une plaque de verre, entre les deux pôles d'un fort électro-aimant, de façon qu'elle fût perpendiculaire aux lignes de force du champ magnétique. Par la feuille d'or, qui avait la forme d'un rectangle, passait, d'un des côtés courts à l'autre, le courant de quelques éléments de Bunsen (le *courant principal*), et deux points, situés vis-à-vis l'un de l'autre sur les côtés longs, étaient reliés à un galvanomètre sensible.

Avant la mise en action de l'électro-aimant, ces deux points avaient été déterminés de telle sorte qu'ils fussent équipotentiels et que par conséquent, à l'établissement ou à la rupture du courant principal, aucun changement ne fût observé dans la position de

1) Un premier Mémoire dans *American Journal of Science a. Arts*, XIX, p.200, et *Phil Mag.*, 5th Series, IX, p.225; un second dans *American Journal*, XX, p.161, et *Phil. Mag.*, X, p.301.

l'aiguille du galvanomètre. Un courant étant alors admis dans le fil de l'électro-aimant, l'aiguille éprouvait une déviation, qui persistait tant que durait la force magnétique, et qui ne pouvait donc être attribuée à un phénomène d'induction. En d'autres termes, dès que la feuille d'or, traversée par le courant principal, est placée dans un champ magnétique, perpendiculaire aux lignes de force, il apparaît une force électromotrice dans une direction transversale, perpendiculaire aussi bien à la direction du courant principal qu'à celle de la force magnétique.

§ 2. Le phénomène n'avait d'ailleurs qu'une faible intensité; dans les différentes expériences, la force électromotrice transversale varia de $^1/_{3000}$ à $^1/_{6500}$ de la force électromotrice longitudinale qui est la cause du courant principal. Il fut reconnu, en outre, que le phénomène ne pouvait être observé que dans des feuilles métalliques très minces, et le matériel ne se prêtait donc pas à des mesures exactes. Néanmoins, M. Hall réussit à faire quelques déterminations quantitatives, indiquant que dans une même feuille métallique la force électromotrice transversale est proportionnelle tant à l'intensité du courant principal (ou à la force électromotrice qui entretient celui-ci) qu'à la puissance du champ magnétique. Ce résultat a été confirmé par des expériences postérieures de M. v. Ettingshausen [1]), lesquelles s'accordent aussi d'une manière satisfaisante avec celles de M. Hall en ce qui concerne l'intensité de l'effet. M. v. Ettingshausen a trouvé, dans différents cas, les valeurs $^1/_{7700}$ et $^1/_{2500}$ pour le rapport des forces électromotrices transversale et longitudinale.

M. Hall a aussi essayé l'argent, le fer, le nickel, le platine et l'étain, et il y a observé le même phénomène, dont toutefois la direction n'était pas toujours la même.

§ 3. Dans l'or la direction peut être indiquée de la manière suivante. Si, selon l'usage ordinaire, on entend par la direction d'un courant celle que suit l'électricité positive, la direction de la force électromotrice transversale s'obtient en faisant tourner

---

1) *Wiener Sitzungsberichte*, 2te Abth. LXXXI, p.441.

la direction du courant principal d'un angle de 90° dans le sens du courant qui circule dans la bobine de l'électro-aimant. Lorsque, comme dans les expériences de M. Hall, les deux points situés en face l'un de l'autre sur les côtés longs de la feuille métallique sont reliés au galvanomètre, la règle énoncée détermine la direction du courant observée dans cet instrument. La communication avec le galvanomètre n'existe-t-elle pas, la force électromotrice transversale produira naturellement une accumulation d'électricité positive à l'un des bords de la feuille métallique et d'électricité négative à l'autre bord, jusqu'à ce que la force électromotrice qui en résulte fasse équilibre à celle qui provient de l'aimant. Dans ce cas, la règle donnée détermine la direction allant du côté négatif au côté positif de la feuille métallique.

La règle trouvée pour l'or s'applique aussi aux autres métaux étudiés par M. Hall, à l'exception du fer; dans ce métal le phénomène se produit en sens inverse.

§ 4. Sans vouloir donner une *explication* de l'action décrite, nous pouvons envisager celle-ci au point de vue de quelques propositions générales concernant la nature des forces physiques.

Une première proposition de ce genre est relative au mouvement de deux systèmes matériels A et A' pouvant être regardés, par rapport à un plan fixe, comme l'image par réflexion l'un de l'autre. Nous entendons par là que les points matériels de A et A', qui sont l'image l'un de l'autre, sont aussi de même nature physique, et que les points de A agissent réciproquement suivant les mêmes lois que ceux de A'. Le théorème en question dit alors que, s'il existe en A (sous l'influence des forces intérieures) un certain état de mouvement, il peut exister en A' un état de mouvement tel que A' *reste* l'image de A. Tous les phénomènes que nous connaissons plaident en faveur de ce théorème; il cesserait seulement d'être vrai si l'on voulait supposer concurremment des matières électriques et des matières magnétiques. Mais dès qu'on adopte la théorie d'Ampère sur la nature du magnétisme, l'image d'un pôle magnétique devient un pôle contraire et la proposition

peut être admise aussi dans le domaine de l'électromagnétisme.

En prenant maintenant, dans l'expérience de Hall, les images, par rapport à un plan quelconque, de la plaque métallique (c'est-à-dire de tous ses points matériels), du courant magnétisant, du courant principal et du courant du circuit galvanométrique (ou, si ce dernier manque, de l'électricité libre aux bords de la feuille métallique), on obtient une seconde expérience, dans laquelle, comme il est facile de le voir, la direction du phénomène est de nouveau déterminée par la règle du § précédent. Il en résulte que l'image d'un morceau de métal a exactement les mêmes propriétés (au moins en tant qu'il y a lieu d'en tenir compte ici) que ce métal lui-même.

On sait que cela ne peut être dit de tous les corps; il existe des matières dont l'image possède d'autres propriétés que la matière elle-même, et dont les parties constituantes doivent avoir un arrangement tel que, même si l'on prend l'image de chaque point matériel, l'image totale ne peut pas être superposée à la matière originale. Ces matières sont celles qui présentent la rotation *naturelle* du plan de polarisation, car, de la proposition mentionnée au commencement de ce §, il suit aisément que l'image d'une matière dextrogyre doit être lévogyre. Dans les matières telles que le quartz dextrogyre et lévogyre la nature nous présente des corps qui, en ce qui concerne leur structure moléculaire, montrent la même différence qu'un objet et son image, différence qui se manifeste d'ailleurs dans la forme cristalline extérieure. Le raisonnement ci-dessus prouve que le phénomène observé par Hall est, en tout cas, entièrement indépendant des causes qui donnent lieu à la rotation naturelle du plan de polarisation.

§ 5. Une seconde proposition est celle-ci: lorsque, dans un système matériel, la vitesse de chaque point est subitement invertie, ces points parcourent exactement les mêmes trajectoires qu'avant le renversement, avec les mêmes vitesses, seulement en direction opposée. Cette proposition ne peut être vraie que pour certaines catégories de forces. Sans rechercher si toutes les forces physiqnes connues appartiennent à ces catégories,

nous remarquerons ici que le théorème en question est applicable dans la théorie de l'électricité, si un état électrostatique est regardé comme un état réel de repos, un courant électrique, au contraire, comme un phénomène de mouvement, dont l'inversion produit le renversement de la direction du courant, et si l'on suppose seulement des forces telles que des attractions et des répulsions, qui sont des fonctions de la distance ou qui sont déterminées par la loi de Weber ou par celle de Clausius, ou enfin des pressions et des tensions, indépendantes des vitesses.

Figurons-nous maintenant l'expérience de Hall disposée de façon qu'il n'existe pas de communication des bords de la lame métallique avec le galvanomètre et qu'il y ait par conséquent, à ces bords, une accumulation d'électricité libre. Si l'on renverse alors toutes les directions de mouvement, le courant principal acquiert une direction contraire, l'aimant une polarité contraire, tandis que rien n'est changé à la charge électrostatique des bords de la feuille métallique. On obtient donc un état qui, tout comme l'état primitif, satisfait à la règle du § 3; celle-ci implique, en effet, qu'en cas de renversement simultané des pôles magnétiques et du courant principal, l'effet conserve le même signe. Nous pouvons donc conclure que le phénomène observé par M. Hall est en complet accord avec le théorème énoncé dans le présent §.

Ce théorème étant admis, un raisonnement simple montre qu'une autre expérience de M. Hall [1]), faite avec un isolateur, ne pouvait conduire à aucun résultat. A partir des quatre côtés d'une plaque de verre à glace et jusqu'à une petite distance du centre avaient été forés des canaux parallèles aux faces latérales. Dans ces canaux étaient introduites des électrodes bien isolées, dont deux, situées vis-à-vis l'une de l'autre, communiquaient avec les armatures d'un condensateur chargé, tandis que les deux autres étaient reliées à un électromètre à quadrant. La plaque de verre étant placée, comme précédemment la feuille métallique, entre les pôles d'un électro-aimant, on reconnut que

[1]) *American Journal*, XX; *Phil. Mag.*, X, p.304.

le renversement de ces pôles n'avait pas d'influence sur l'indication de l'électromètre. M. Hall avait présumé que peut-être une pareille influence se produirait, en conséquence de ce que, comme dans le métal les lignes de courant, ici les lignes de force pouvaient subir une rotation, ce qui aurait effectivement pour résultat un changement de la différence de potentiel entre les deux électrodes reliées à l'électromètre.

Mais, si une pareille action existait, le renversement de toutes les directions de mouvement du système entier donnerait seulement lieu à l'interversion des pôles, tandis que dans la plaque de verre, où tout est en repos, rien ne changerait. Or, comme il est impossible qu'en cas d'interversion des pôles l'action reste la même, il faut ou bien que le théorème mentionné dans ce § soit inexact, ou bien que le résultat cherché par M. Hall soit impossible.

§ 6. Dans beaucoup de phénomènes électriques on peut admettre, — et telle est la troisième des propositions que nous avions en vue, — que l'électricité positive et négative (regardées ici comme des matières) se comportent de la même façon, qu'elles éprouvent donc les mêmes forces non seulement de la part de l'électricité de même signe ou de signe contraire mais aussi de la part de la matière ordinaire. La plupart des phénomènes électrostatiques sont en accord avec cette proposition, et il en est de même de beaucoup d'actions où intervient le courant galvanique; celui-ci peut souvent être conçu, indifféremment, soit comme un mouvement d'électricité positive vers un côté, soit comme un mouvement d'électricité négative vers le côté opposé. La preuve, toutefois, que la proposition énoncée n'est pas d'une vérité générale, est fournie, entre autres, par les phénomènes de décharge, par l'électrolyse et par la différence de potentiel entre des corps mis en contact. Or, il convient de remarquer que l'expérience de Hall est également en désaccord avec la proposition. En effet, si celle-ci était exacte, de tout état de mouvement de particules électriques dans un système de corps on pourrait déduire un second état, pareillement possible, en remplaçant simplement

chaque particule électrique positive par une égale particule négative, et réciproquement; d'un courant électrique il naîtrait ainsi un courant dirigé en sens contraire. Ceci étant appliqué à l'expérience de Hall, dans la forme, par exemple, où une accumulation d'électricité libre se produit aux bords de la feuille métallique, on devrait, en renversant les pôles magnétiques et le courant principal, obtenir aussi un effet opposé, tandis qu'en réalité l'effet conserve alors le même signe.

Pour toutes les théories qui cherchent à expliquer les phénomènes par les mouvements de particules électriques, il suit donc, de l'expérience de Hall, ou bien que dans un courant électrique les deux électricités ne se meuvent pas de la même manière (de sorte que leur substitution réciproque fait naître quelque chose qui n'est pas un courant électrique ordinaire), ou bien qu'il doit exister quelque autre différence dans la façon dont les électricités positive et négative se comportent.

Aussi, lorsque M. Boltzmann [1]), peu de temps après que M. Hall eut fait connaître ses expériences, fonda sur elles une méthode pour déterminer la vitesse de l'électricité dans un courant galvanique, il admit que dans la feuille métallique une seule des deux électricités se déplace. Une grave objection à cette hypothèse est fournie, comme l'a remarqué M. Hall [2]), par la direction du phénomène dans le fer, laquelle est opposée à celle dans les autres métaux. Mais, qu'on accepte ou non l'hypothèse de M. Boltzmann, l'une ou l'autre différence entre les deux électricités sera toujours nécessaire pour expliquer l'expérience de Hall.

§ 7. Sans essayer une pareille *explication*, on peut donner une *description mathématique* du phénomène. M. Hopkinson [3]) a fait remarquer que cette description est déjà contenue dans

---

1) *Phil. Mag.*, IX, p.308.

2) *American Journ*, XX, p.52, et *Phil. Mag.*, X, p.136.

3) *Phil. Mag.*, X, p.430.

un système d'équations établi antérieurement par Maxwell [1]).

En effet, tout ce qu'a observé M. Hall peut être déduit si l'on fait subir aux équations

$$X = \varkappa u, \quad Y = \varkappa v, \quad Z = \varkappa w,$$

qui dans les cas ordinaires expriment la relation entre la force électromotrice (X, Y, Z) et le courant (u, v, w), une légère modification, savoir si, pour un conducteur placé dans un champ magnétique homogène, dont les lignes de force sont dans la direction de l'axe des z, on pose

$$X = \varkappa u + h v, \quad Y = \varkappa v - h u, \quad Z = \varkappa w \quad \ldots . \; (1)$$

(X, Y, Z) doit alors être la force électromotrice qui existe indépendamment du phénomène de Hall, tandis que h est un coefficient proportionnel à la force magnétique.

Les équations (1) s'obtiennent facilement, si l'on remarque que la force électromotrice totale dans la direction de l'axe des x est composée de X et de la force électromotrice qui, d'après la règle du § 3, doit son origine au „courant principal" v et à la force magnétique. Cette force électromotrice *accessoire* peut être représentée par $h v$, et la force totale, à laquelle le courant u doit être proportionnel, devient alors $X \pm h v$; de la même manière on a, parallèlement à l'axe des y, la force électromotrice $Y \mp h u$. Le choix des signes est subordonné à la nature du système de coordonnées qu'on emploie. Nous admettrons que lorsque l'axe positif des x tourne de 90° vers l'axe positif des y, cette rotation concorde, pour un spectateur placé du côté des z positifs, avec le mouvement des aiguilles d'une montre. Il suit alors, de ce qui a été dit au § 3, que dans (1) h est positif pour le fer, négatif pour les autres métaux étudiés.

De la faiblesse des actions observées dans l'expérience de

---

1) *Electricity a. Magnetism*, I, p.349.

Hall on peut d'ailleurs conclure que, même dans un champ magnétique très puissant, la quantité h est très petite comparativement à $\varkappa$. Aussi, dans tous les calculs suivants, négligerons-nous les puissances deuxième et supérieures de h.

§ 8. Les équations (1) peuvent d'abord servir à étudier en détail le phénomène observé par M. Hall. Remarquons, à cet effet, que dans la mince feuille métallique, placée perpendiculairement à l'axe des z, il est permis de poser Z et $w = 0$, de sorte que nous n'avons affaire qu'aux deux premières équations. Si maintenant l'axe des x coïncide avec la longueur de la feuille métallique, u est le courant principal, et si les bords ne sont *pas* reliés au galvanomètre, l'équilibre se produit quand on a $v = 0$ et par conséquent, à la fois,

$$X = \varkappa u \text{ et } Y = -h u.$$

La quantité

$$Y = -\frac{h}{\varkappa} X$$

détermine la force électromotrice qui, dans l'état d'équilibre, existe par suite de la charge électrostatique des bords, et, si b est la largeur de la lame, la différence de potentiel entre les bords devient

$$\frac{h}{\varkappa} b X.$$

Quant à l'intensité i du courant qui peut être observé dans le galvanomètre, elle est donnée par

$$i = \frac{h}{\varkappa} \cdot \frac{b X}{r},$$

lorsque r est la résistance du circuit galvanométrique.

En désignant par I l'intensité du courant principal, et par δ l'épaisseur de la feuille métallique, on a

$$X = \frac{\varkappa I}{b\,\delta},$$

donc

$$i = \frac{h\,I}{\delta\,r}.$$

Au lieu de I, nous pouvons encore introduire la force électromotrice E de la pile qui nous fournit le courant principal. Si l'on désigne par α une quantité dépendant de la longueur et de la largeur de la feuille métallique et de la place des électrodes, la résistance que la feuille métallique oppose au courant principal peut être représentée par $\frac{\alpha}{\delta}$, de sorte que, R étant la résistance dans le courant principal en dehors de la feuille métallique, on a

$$I = \frac{E}{R + \frac{\alpha}{\delta}}.$$

De même, on aura

$$r = r_g + \frac{\alpha'}{\delta},$$

si r_g est la résistance dans le circuit galvanométrique en dehors de la feuille métallique et α' une quantité analogue à α. La formule

$$i = \frac{h\,E}{\delta\left(R + \frac{\alpha}{\delta}\right)\left(r_g + \frac{\alpha'}{\delta}\right)}$$

montre comment le courant dans le galvanomètre varie avec δ. Ce courant devient maximum lorsque

$$\frac{\alpha\,\alpha'}{\delta^2} = R\,r_g,$$

c'est-à-dire, lorsque le produit des deux résistances de la feuille métallique, dont il y a à tenir compte, est égal à celui des résistances extérieures. Bien entendu, cela exige une épaisseur très faible.

§ 9. Nous examinerons encore de plus près jusqu'à quel point une modification peut être introduite dans la marche des courants électriques par les termes $+ h v$ et $- h u$ qui entrent dans les équations (1). Bornons-nous au cas d'une mince feuille métallique de forme quelconque, placée dans le plan $x y$, et limitée en partie par des bords où il ne peut entrer ni sortir d'électricité (bords *libres*), en partie par des bords (ou portions de bords) donnant accès ou issue à l'électricité et que nous supposerons maintenus ainsi chacun à un potentiel constant. Supposons qu'il y ait deux pareilles électrodes, s_1 et s_2, aux potentiels φ_1 et φ_2, et tâchons de déterminer la distribution du courant dans la lame.

Lorsque aucune force magnétique n'agit, nous avons, φ désignant la fonction potentielle en un point quelconque,

$$u = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

et dans l'état stationnaire

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

tandis qu'aux électrodes on doit avoir

$$\varphi = \varphi_1 \text{ et } \varphi = \varphi_2$$

et au bord libre

$$u \cos \alpha + v \sin \alpha = 0,$$

ou

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

n représente ici la normale au contour de la lame, et α l'angle $(n x)$. Nous nous figurons la normale dirigée vers l'extérieur.

Quand φ est déterminée par ces conditions, la quantité d'électricité qui dans l'unité de temps passe de s_1 à la lame et de celle-ci à s_2 (nous supposons $\varphi_1 > \varphi_2$), est donnée par

$$e = -\delta \int (u \cos \alpha + v \sin \alpha)\, d s_1,$$

où l'intégration doit s'étendre à toute l'électrode.

Supposons maintenant qu'une force magnétique agisse et qu'il y ait par conséquent lieu d'appliquer les équations (1). En continuant d'attribuer à φ, u, v la signification antérieure, nous pouvons, dans ce nouveau problème, écrire pour la fonction potentielle et pour les composantes du courant: $\varphi + \varphi'$, $u + u'$, $v + v'$; φ', u', v' sont ici, comme h, de très petites quantités.

La première des équations (1) donne alors

$$-\frac{\partial (\varphi + \varphi')}{\partial x} = \varkappa (u + u') + h(v + v'),$$

ou, en négligeant des quantités du second ordre et en ayant égard à (2),

$$u' = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{h}{\varkappa^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

de même, on a

$$v' = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi'}{\partial y} - \frac{h}{\varkappa^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

De ces équations, combinées avec

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0,$$

on déduit pour l'état stationnaire

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Comme d'ailleurs, aux électrodes, φ prend déjà les valeurs prescrites, il faut qu'on y ait

$$\varphi' = 0,$$

tandis qu'au bord libre nous obtenons la condition

$$u' \cos \alpha + v' \sin \alpha = 0,$$

ou, en vertu de (4) et (5),

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{h}{\varkappa}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \alpha\right).$$

La dernière équation peut être remplacée par

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{h}{\varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

lorsque s est compté le long du bord et pris positif dans une direction telle, qu'une rotation de la normale n vers la direction s corresponde à une rotation de l'axe des x vers l'axe des y.

φ' différant maintenant de 0, comme le confirment les expériences de M. Hall, il s'agit de savoir si la quantité d'électricité, qui par unité de temps s'écoule de s_1 sur la lame, est changée. En écrivant pour cette quantité $e + e'$, on a

$$e' = -\delta \int (u' \cos \alpha + v' \sin \alpha)\, d s_1,$$

donc, en vertu de (4) et (5),

$$e' = \frac{\delta}{\varkappa} \int \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d s_1,$$

puisque, le long de s_1, il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0.$$

L'état étant supposé stationnaire, la quantité e' doit, en tout cas, quitter la lame à la seconde électrode, de sorte qu'on a aussi

$$e' = -\frac{\delta}{\varkappa} \int \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d s_2.$$

Nous démontrerons maintenant que $e' = 0$. A cet effet, nous faisons usage de la formule connue

$$\int \varphi \left(\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2}\right) d\omega - \int \varphi' \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) d\omega =$$
$$= \int \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds - \int \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds,$$

où $d\omega$ représente un élément de surface de la feuille métallique et où les deux premières intégrales doivent être prises sur toute l'étendue de cette feuille, les deux dernières le long du bord libre et des électrodes. Or, en vertu de (3) et de (6), les deux premières intégrales s'évanouissent, et la quatrième est également 0, parce qu'aux électrodes on a $\varphi' = 0$ et au bord libre $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. On obtient donc

$$\int \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Etendue à la première électrode, cette intégrale donne:

$$\varphi_1 \int \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds_1 = \frac{\varkappa}{\delta} \varphi_1 e', \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

et pareillement, étendue à la seconde électrode:

$$\varphi_2 \int \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds_2 = -\frac{\varkappa}{\delta} \varphi_2 e' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Pour la troisième partie de l'intégrale (8), partie qui doit être prise le long du bord libre, il est permis d'écrire, en vertu de (7):

$$\frac{h}{\varkappa} \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \frac{h}{2\varkappa} \int \frac{\partial (\varphi^2)}{\partial s} ds$$

et nous pouvons étendre cette intégration au contour entier, puisque le long des électrodes on a $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$. Or, si l'on considère que le contour consiste en une ou plusieurs lignes fermées, dont chacune doit être parcourue en entier quand on veut évaluer l'intégrale (voir ce qui a été dit ci-dessus concernant la direction positive le long de s), on reconnaît que la dernière

intégrale disparaît. L'équation (8) se réduit donc à ceci, que la somme de (9) et (10) s'annule, et de là suit $e' = 0$.

Si les équations (1) sont exactes, il passera donc par la lame, sous la différence de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2$, la même quantité d'électricité, que la lame se trouve ou non dans le champ magnétique; en d'autres termes, la force magnétique ne déterminera aucun changement dans la *résistance* de la lame. Les expériences entreprises par M. Hall et par d'autres [1]), en vue de la découverte d'un pareil changement, ne pouvaient donc fournir aucun résultat ou du moins ne faire trouver qu'un changement de résistance d'un ordre supérieur à h.

§ 10. Immédiatement après que M. Hall eut exécuté ses premières expériences, M. Rowland [2]) fit remarquer que l'action dont elles accusaient l'existence pouvait conduire à une explication de la rotation électromagnétique du plan de polarisation de la lumière. En effet, si sous l'influence d'un aimant un courant est dévié de sa direction, par suite de l'apparition d'une composante transversale, on comprend que les vibrations lumineuses, qui selon la théorie de Maxwell sont des mouvements de même nature que les courants électriques, éprouvent également une rotation dans un champ magnétique. Plus tard, M. Rowland a publié un Mémoire étendu [3]), dans lequel il étudie la question de plus près, en se bornant aux corps isolants. Il est vrai que dans son expérience sur un isolateur M. Hall n'a pu constater une rotation des lignes de force, et que des raisons théoriques nous ont aussi fait regarder une semblable action comme peu probable; mais rien n'empêche de supposer que dans les isolateurs il se produit d'une autre manière une action analogue à celle que M. Hall a observée dans les métaux. On peut en effet admettre que, dans un champ magnétique, tout *mouvement* d'électricité dans l'isolateur (le *displacement-current* de Maxwell)

---

1) *Phil. Mag*, IX, p.226 et X, p.301 et 326.

2) *Phil. Mag.*, IX, p.432.

3) *Amer. Journ. of Math.*, III, p.89. De ce Mémoire, je ne connais que l'extrait donné dans les *Beiblätter zu Wied. Ann.*, V. p.313.

provoque une force électromotrice transversale. Telle est l'hypothèse qui a servi de point de départ à M. Rowland dans le Mémoire cité en dernier lieu.

Les expériences de Hall n'ayant montré le nouveau phénomène que dans les métaux, j'ai cru que précisément chez ces corps il était opportun d'étudier l'influence du magnétisme sur le mouvement lumineux. Cette étude m'a paru offrir d'autant plus d'intérêt que les expériences de M. Kerr, sur la lumière réfléchie par un pôle magnétique, ont fait connaître des phénomènes qui sont indubitablement dans une relation intime avec la rotation du plan de polarisation dans les corps transparents.

§ 11. Imaginons qu'un milieu quelconque, — conducteur ou non, — dans lequel se manifeste l'effet observé par M. Hall, soit placé dans un champ magnétique homogène, à lignes de force parallèles à l'axe des z. Lorsque des mouvements électriques ont lieu dans ce corps, la force électromotrice $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, qui au temps t agit en un point (x, y, z), sera composée de deux parties, à savoir, de la force (X, Y, Z) imputable à l'action électrostatique et à l'induction, et de la force électromotrice accessoire, découverte par M. Hall. Comme nous devons admettre, pour pouvoir expliquer aussi dans les isolateurs la rotation du plan de polarisation, que le *displacement-current* produit une action analogue à celle du courant ordinaire de conduction nous supposerons que la force électromotrice transversale dépend de la manière indiquée au § 7 des composantes totales du courant. Celles-ci étant représentées par u, v, w, nous posons donc

$$\mathbf{X} = X - h v, \quad \mathbf{Y} = Y + h u, \quad \mathbf{Z} = Z \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

§ 12. Rien n'est changé, par l'intervention de l'action nouvelle, ni à la manière dont la force électromotrice (X, Y, Z) dépend des composantes du courant, de la distribution de l'électricité libre et des moments magnétiques qui peuvent être suscités par le courant électrique, ni à la relation de ces dernières quantités entre elles.

En désignant donc par φ et χ les fonctions potentielles élec-

trique et magnétique, par L, M, N les composantes de la force magnétique, — les quatre dernières quantités en tant qu'elles sont dues au mouvement électrique, donc avec exclusion de la force magnétique permanente à laquelle le corps est soumis, — enfin par ϑ la constante magnétique, on peut appliquer les équations ordinaires [1])

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}&=(1+4\pi\vartheta)A\frac{\partial L}{\partial t},\\ \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}&=(1+4\pi\vartheta)A\frac{\partial M}{\partial t},\\ \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}&=(1+4\pi\vartheta)A\frac{\partial N}{\partial t},\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\text{(I)}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=-\Delta\varphi+A^2 k\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\quad\ldots\ldots\text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}&=A\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}-4\pi u\right),\\ \frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}&=A\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}-4\pi v\right),\\ \frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}&=A\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}-4\pi w\right),\end{aligned}\right\}\quad\ldots\text{(III)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=-\Delta\chi\quad\ldots\ldots\ldots\text{(IV)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\varphi)\ldots\ldots\ldots\text{(V)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=\frac{1}{4\pi\vartheta}\Delta\chi,\ldots\ldots\ldots\text{(VI)}$$

qui avec (11) déterminent le mouvement lumineux, si nous y joignons encore les équations qui expriment la relation entre u, v, w et **X**, **Y**, **Z**.

[1]) Helmholtz, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität in ruhenden Leitern*, dans Crelle's *Journal* LXXII. Voir aussi ma *Theorie der terugkaatsing en breking van het licht*, Chap. II. A et k sont les constantes qui entrent dans la formule de l'induction.

§ 13. Bien que cette relation ne soit pas complètement connue, nous pouvons pourtant traiter la question très simplement, en nous bornant à considérer des faisceaux lumineux d'une durée de vibration déterminée et en laissant de côté tous les problèmes qui appartiennent à la théorie de la dispersion.

D'abord nous pouvons admettre que dans un milieu isotrope u n'est lié qu'à $\mathbf{X}$, v à $\mathbf{Y}$, w à $\mathbf{Z}$, et que la forme de ces trois relations est la même. Ensuite, il sera permis de supposer que la relation entre $\mathbf{X}$ et u est exprimée par une équation dans laquelle ces quantités elles-mêmes et un ou plusieurs de leurs coefficients différentiels par rapport à t entrent linéairement, avec des coefficients constants, c'est-à-dire qu'on a

$$A\mathbf{X} + B\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \text{etc.} \ldots = A'u + B'\frac{\partial u}{\partial t} + \text{etc.}, \quad (12)$$

où A, B, . . ., A', B', . . . dépendent de la nature du corps [1]).

On peut facilement déduire de là que, lorsque $\mathbf{X}$ est donné par une fonction goniométrique du temps, u est également représenté par une fonction de ce genre, laquelle toutefois, en général, offrira une certaine différence de phase par rapport à $\mathbf{X}$. La chose devient encore plus simple si l'on cherche d'abord, ainsi qu'il est permis de le faire pour un système d'équations linéaires, une solution où entrent des fonctions exponentielles, de laquelle on déduira ensuite la solution véritable, en sup-

[1]) Cette équation comprend, par exemple, le cas où dans un isolateur les composantes de la polarisation diélectrique sont $= \varepsilon\mathbf{X}$, $\varepsilon\mathbf{Y}$, $\varepsilon\mathbf{Z}$ et où, par conséquent, $u = \varepsilon\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}$. De même, elle comprend le cas d'un courant ordinaire de conduction, où l'on a $\mathbf{X} = \varkappa u$. Mais, même en admettant (voir ma *Theorie der terugkaatsing en breking van het licht*, Chap. V, ainsi que Schlömilch's *Zeitschrift*, t. XXII, p. 1 et 205, t. XXIII, p. 197) que dans un métal il existe une polarisation électrique des molécules et que dans un courant une certaine masse est en mouvement, on arrive à des formules qui sont comprises dans l'équation (12). La forme générale de celle-ci a l'avantage d'être indépendante d'hypothèses particulières sur le mécanisme par lequel u est excité par $\mathbf{X}$.

posant les exposants imaginaires et en prenant seulement les parties réelles.

Si maintenant u et $\mathbf{X}$ ne contiennent le temps que dans le facteur

$$e^{\gamma t},$$

(où γ sera supposé imaginaire $= -i\frac{2\pi}{T}$), l'équation (12) et les deux équations correspondantes se réduisent à

$$u = p\,\mathbf{X}, \quad v = p\,\mathbf{Y}, \quad w = p\,\mathbf{Z} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

La quantité p est en général complexe et comprend les *deux* quantités (par exemple, la vitesse de propagation et le coefficient d'absorption, ou l'angle d'incidence principal et l'azimut principal) par lesquelles peuvent être caractérisées les propriétés optiques du milieu. Il est évident que p dépendra de γ, par conséquent de la durée de vibration T, mais, tant que nous nous bornons à une valeur unique de T, il n'est pas nécessaire d'examiner de plus près cette dépendance.

§ 14. Considérons maintenant le cas d'un faisceau lumineux qui traverse le milieu dans la direction de l'axe des z, donc suivant les lignes de force du champ magnétique. Nous ferons voir que des vibrations transversales sont possibles, mais qu'un mouvement d'électricité doit avoir lieu tant suivant l'axe des x que suivant l'axe des y. En d'autres termes, nous démontrerons que les expressions

$$u = e^{\gamma(t - Rz)}, \quad v = a\, e^{\gamma(t - Rz)}, \quad w = 0$$

satisfont aux équations du mouvement, lorsque a et R sont convenablement choisis.

Posons, pour abréger:

$$e^{\gamma(t - Rz)} = P,$$

donc

$$u = P, \quad v = a\,P, \quad w = 0;$$

il suit alors de (13):

$$\mathbf{X} = \frac{1}{p} P, \quad \mathbf{Y} = \frac{a}{p} P, \mathbf{Z} = 0,$$

de (11)

$$X = \left(\frac{1}{p} + a\,h\right) P, \quad Y = \left(\frac{a}{p} - h\right) P, \quad Z = 0,$$

et de (I)

$$L = \frac{R}{(1 + 4\pi\vartheta) A} Y, \quad M = -\frac{R}{(1 + 4\pi\vartheta) A} X, \quad N = 0.$$

A (II), (IV), (V) en (VI) il sera satisfait par

$$\varphi = 0 \text{ et } \chi = 0,$$

tandis que la troisième des équations (III) donne alors $0 = 0$ et que les deux premières fournissent deux conditions. Si l'on pose

$$4\pi A^2 (1 + 4\pi\vartheta) = B, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

ces deux conditions sont

$$\gamma \left(\frac{1}{p} + a\,h\right) R^2 = B$$

et

$$\gamma \left(\frac{a}{p} - h\right) R^2 = a\,B.$$

De là résulte finalement:

$$a = \pm i$$

et

$$R^2 = \frac{B\,p}{\gamma (1 \pm i\,h\,p)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

§ 15. L'apparition des doubles signes montre que *deux* états de vibration, tels que nous les avons supposés, sont possibles et que ces deux états suivent, dans leur propagation, des lois différentes.

Dans le premier, on a

$$u = P, \quad v = i\,P,$$

d'où, en posant

$$\gamma = -i\,\frac{2\pi}{T}$$

et

$$R = S_1 + i S_2$$

(car R est en général une quantité complexe), et en prenant finalement les seules parties réelles, on déduit:

$$u = e^{-\frac{2\pi S_2}{T}z} \cos \frac{2\pi}{T}(t - S_1 z),$$

$$v = e^{-\frac{2\pi S_2}{T}z} \sin \frac{2\pi}{T}(t - S_1 z).$$

Ces équations représentent un faisceau de lumière polarisée circulairement, qui se propage avec la vitesse $\frac{1}{S_1}$ et subit une absorption dont la valeur est déterminée par S_2.

En prenant les signes inférieurs, on obtient un faisceau analogue, mais à polarisation circulaire opposée, et auquel correspondent d'autres valeurs de S_1 et de S_2.

L'équation (15), qui détermine la quantité R pour les deux états de mouvement, peut être mise sous une forme encore plus convenable par l'introduction de la valeur R_0, relative au cas où aucune force magnétique n'agit sur le corps. On a évidemment

$$R_0^2 = \frac{Bp}{\gamma},\ p = \gamma\,\frac{R_0^2}{B},$$

de sorte que (15) devient

$$R^2 = \frac{R_0^2}{1 \pm i\gamma\,\frac{R_0^2 h}{B}},$$

où, vu la faible valeur de h,

$$R = R_0\left(1 \mp \tfrac{1}{2} i\gamma\frac{R_0^2 h}{B}\right) \ldots\ldots\ldots (16)$$

Dans un isolateur, p est une quantité purement imaginaire et, puisque γ l'est également, R_0 est réel; d'après (16), R prendra

de même une valeur réelle. Aucun des deux rayons polarisés circulairement ne subit donc, dans ce cas, une absorption; il n'y a à considérer que leurs vitesses de propagation, et de la différence de celles-ci on conclut, de la manière connue, à la rotation du plan de polarisation. Après le travail de M. Rowland, nous n'avons toutefois pas à nous occuper de cette question.

§ 16. Chez les métaux, rien jusqu'ici n'a été constaté directement quant aux différences d'absorption et de vitesse de propagation que doivent présenter les deux faisceaux lumineux dont il vient d'être question. Mais, comme en général chaque particularité dans la manière dont la lumière se propage dans un corps se dévoile dans les propriétés de la lumière réfléchie, il a été prouvé par les expériences de M. Kerr que le fer, placé dans un champ magnétique, réfléchit la lumière suivant d'autres lois que le fer non magnétisé.

La théorie exposée plus haut permet de traiter la réflexion dans un champ magnétique [1]). Nous admettrons, à cet effet, que le phénomène observé par M. Hall existe seulement dans le second milieu, que par conséquent dans le premier, — qui en outre sera transparent, — le plan de polarisation n'est pas dévié. Nous nous bornons d'ailleurs au cas le plus simple, celui où le plan de séparation est perpendiculaire aux lignes de force et où la lumière a une incidence normale. Dans le second milieu il n'y aura alors qu'une propagation suivant les lignes de force, propagation à laquelle, si l'axe positif des z est dirigé du côté de ce milieu, s'appliquent immédiatement les formules établies dans les derniers §§.

Pour trouver comment est réfléchi un mouvement incident donné, nous commençons par un problème plus simple, à savoir celui-ci: comment la lumière incidente doit-elle être constituée pour que dans le second milieu il ne se forme qu'un seul des deux faisceaux polarisés circulairement que nous avons appris

[1]) Avant que M. Hall eût publié ses expériences, M. Fitzgerald (*Phil. Trans.*, CLXXI, p.691) avait déjà donné une théorie des expériences de M. Kerr, dans laquelle, toutefois, il n'était pas tenu compte de l'absorption.

à connaître, et quelles sont alors les propriétés de la lumière réfléchie? Ce problème offre deux cas, suivant qu'on veut ne se laisser former dans le second milieu que le faisceau polarisé à droite ou le faisceau polarisé à gauche, mais, les formules relatives à ces deux cas ne différant entre elles que par quelques signes, nous pouvons traiter les deux cas simultanément. En combinant les résultats obtenus, nous pourrons ensuite trouver la solution pour le cas où le mouvement incident est donné.

§ 17. Lorsque dans aucun des deux milieux n'existe l'effet de Hall, les forces électromotrices X, Y et les forces magnétiques L, M parallèles au plan de séparation varient d'une manière continue quand on passe du premier milieu au second [1]). Cette continuité étant une conséquence de la manière dont les susdites quantités dépendent des mouvements électriques et des moments magnétiques, les mêmes conditions limites s'appliqueront encore au cas actuel, pourvu qu'on attribue à X et Y la signification indiquée au § 11. Ces conditions limites sont d'ailleurs les seules dont il y ait à tenir compte, car il est clair que, dans le cas simple auquel nous nous bornons, il se produira un état de mouvement purement transversal, et que ni mouvement électrique, ni moments magnétiques, ni force électrique ou magnétique n'apparaîtront dans la direction de l'axe des z.

§ 18. En distinguant par les indices 1 et 2 les quantités qui ont rapport au premier et au second milieu, on peut écrire pour le mouvement dans ce dernier (§ 14)

$$u_2 = P_2, v_2 = \pm i P_2,$$

$$X_2 = \left(\frac{1}{p_2} \pm i h\right) P_2, Y_2 = \left(\pm \frac{i}{p_2} - h\right) P_2,$$

$$L_2 = \frac{R_2}{(1 + 4\pi \vartheta_2) A} P_2, M_2 = - \frac{R_2}{(1 + 4\pi \vartheta_2) A} X_2,$$

$$P_2 = e^{\gamma(t - R_2 z)}$$

Nous n'avons pas ajouté un facteur indéterminé (amplitude) à v_2,

---

1) Helmholtz, *l.c.* Voir aussi ma *Theorie der terugkaatsing en breking*, p.66 et 158.

parce que l'intensité du faisceau qu'on veut faire apparaître peut naturellement être choisie arbitrairement. Alors toutefois l'intensité, non seulement de la lumière réfléchie, mais encore de la lumière incidente, devient une quantité inconnue.

De même que dans le second milieu, un mouvement, tant dans la direction de l'axe des x que dans celle de l'axe des y, devra avoir lieu dans le premier milieu. Le mouvement incident consistera donc en deux composantes u_1 et v_1, que nous pouvons représenter par

$$u = s P_1 , \quad v = \sigma P_1 ,$$

$$P_1 = e^{\gamma (t - R_1 z)}.$$

On aura ensuite, d'après les équations du mouvement pour le premier milieu,

$$X_1 = \frac{s}{p_1} P_1 , \quad Y_1 = \frac{\sigma}{p_1} P_1 ,$$

$$L_1 = \frac{R_1}{(1 + 4\pi \vartheta_1) A} Y_1 , \quad M_1 = - \frac{R_1}{(1 + 4\pi \vartheta_1) A} X_1 .$$

Les quantités s et σ sont des constantes inconnues.

La lumière réfléchie aura une constitution semblable à celle de la lumière incidente. Affectant donc d'un accent les quantités qui appartiennent à ce faisceau; pour les distinguer de celles qui ont rapport à la lumière incidente, nous représentons le mouvement réfléchi — s' et σ' étant deux nouvelles constantes — par

$$u_1' = s' P_1' , \quad v_1' = \sigma' P_1' ,$$

$$X_1' = \frac{s'}{p_1} P_1' , \quad Y_1' = \frac{\sigma'}{p_1} P_1' ,$$

$$L_1' = - \frac{R_1}{(1 + 4\pi \vartheta_1) A} Y_1' , \quad M_1' = + \frac{R_1}{(1 + 4\pi \vartheta_1) A} X_1$$

$$P_1' = e^{\gamma (t + R_1 z)}.$$

§ 19. A la surface de séparation, où nous supposons $z = 0$, on aura

$$P_1 = P_1' = P_2$$

et la continuité de X, Y, L et M donne successivement

$$\frac{s+s'}{p_1} = \frac{1}{p_2} \pm i h, \qquad (17)$$

$$\frac{\sigma+\sigma'}{p_1} = \pm \frac{i}{p_2} - h,$$

$$\frac{R_1}{1+4\pi\vartheta_1} \cdot \frac{\sigma-\sigma'}{p_1} = \frac{R_2}{1+4\pi\vartheta_2}\left(\pm\frac{i}{p_2} - h\right),$$

$$\frac{R_1}{1+4\pi\vartheta_1} \cdot \frac{s-s'}{p_1} = \frac{R_2}{1+4\pi\vartheta_2}\left(\frac{1}{p_2} \pm i h\right). \qquad (18)$$

De ces équations il résulte d'abord

$$\sigma = \pm i s, \quad \sigma' = \pm i s',$$

de sorte que, pour qu'un seul faisceau de lumière apparaisse dans le second milieu, la lumière incidente doit être polarisée circulairement, et que dans ce cas la lumière réfléchie possédera la même propriété.

Ensuite, on tire de (17) et (18)

$$s' = \frac{\dfrac{R_1}{1+4\pi\vartheta_1} - \dfrac{R_2}{1+4\pi\vartheta_2}}{\dfrac{R_1}{1+4\pi\vartheta_1} + \dfrac{R_2}{1+4\pi\vartheta_2}}\, s,$$

et il n'y a aucune difficulté à trouver séparément chacune des deux valeurs s et s'.

§ 20. Si nous attribuons maintenant à l'amplitude s de la lumière incidente la valeur 1, celle de la lumière réfléchie devient

$$a = \frac{s'}{s} = \frac{\dfrac{R_1}{1+4\pi\vartheta_1} - \dfrac{R_2}{1+4\pi\vartheta_2}}{\dfrac{R_1}{1+4\pi\vartheta_1} + \dfrac{R_2}{1+4\pi\vartheta_2}} \qquad (19)$$

et le mouvement total dans le premier milieu est représenté par

$$u_1 = P_1, \quad v_1 = \pm i P_1,$$
$$u_1' = a P_1', \quad v_1' = \pm i a P_1'.$$

Les valeurs de R_2 et de a, pour le cas où aucune force ma-

gnétique n'agit, étant désignées par $R_{2(0)}$ et a_0, on a d'après (16)

$$R_2 = R_{2(0)} \mp \tfrac{1}{2} i \gamma \frac{R^3{}_{2(0)}\, h}{B_2}$$

et d'après (19)

$$a = a_0 \pm \delta,$$

où

$$\delta = i \frac{h\gamma}{B_2} \frac{\dfrac{R_1\, R^3{}_{2(0)}}{(1 + 4\pi\vartheta_1)(1 + 4\vartheta\vartheta_2)}}{\left[\dfrac{R_1}{1 + 4\pi\vartheta_1} + \dfrac{R_{2(0)}}{1 + 4\pi\vartheta_2}\right]^2} \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

Séparant enfin les deux problèmes traités jusqu'ici concurremment, nous obtenons deux solutions représentées par

$$u_1 = P_1,\ v_1 = +iP_1,$$
$$u_1' = (a_0 + \delta) P_1',\ v_1' = +i(a_0 + \delta) P_1'$$

et

$$u_1 = P_1,\ v_1 = -iP_1,$$
$$u_1' = (a_0 - \delta) P_1',\ v_1' = -i(a_0 - \delta) P_1'.$$

De la combinaison de ces deux solutions on peut maintenant en déduire une troisième dans laquelle la lumière incidente est polarisée rectilignement. Si l'on veut que les vibrations s'y exécutent dans le plan xz, la lumière incidente conservant d'ailleurs l'amplitude 1, on n'a qu'à prendre la demi-somme des deux solutions. On a alors

$$u_1 = P_1,\ v_1 = 0,$$
$$u_1' = a_0 P_1',\ v_1' = i\delta P_1'.$$

§ 21. Tandis que, en dehors du champ magnétique, un faisceau lumineux à incidence normale et polarisation rectiligne ne donne lieu qu'à un faisceau réfléchi ayant la même direction de vibration, ici il apparaît en outre une composante (v_1') polarisée perpendiculairement à la lumière incidente. C'est cette composante qui a été observée dans les expériences de M. Kerr. Pour caractériser complètement ce faisceau, on devra déduire

de (20) son amplitude et sa phase comparativement à la lumière incidente, ou comparativement à la composante u_1'. Bornons-nous en ce moment à l'amplitude; celle-ci calculée, on peut, dans une certaine mesure, porter un jugement sur le phénomène observé par M. Kerr. Cette amplitude s'obtient, comme on sait, en prenant le module de l'expression complexe que nous venons de trouver pour v_1', opération dans laquelle on peut appliquer la proposition que le module du produit de plusieurs quantités complexes est le produit des modules de chacun des facteurs.

§ 22. On arrive ainsi à un résultat assez simple, lorsqu'on admet que dans le métal la valeur de ϑ peut être supposée égale à la valeur dans le premier milieu. On a alors

$$\delta = i \frac{h \gamma}{B} \frac{R_1 R^3{}_{2(0)}}{[R_1 + R_{2(0)}]^2},$$

et en posant

$$\frac{R_{2(0)}}{R_1} = \sigma e^{i \tau}$$

(σ et τ réels [1]), on trouve successivement

$$\text{Mod.} \; [R_{2(0)}] = \sigma R_1 ,$$

$$\text{Mod.} \; [R^3{}_{2(0)}] = \sigma^3 R_1^3,$$

$$\text{Mod.} \; [R_1 + R_{2(0)}]^2 = R_1^2 (1 + 2 \sigma \cos \tau + \sigma^2),$$

par conséquent, à cause de

$$\text{Mod.} (\gamma) = \frac{2 \pi}{T},$$

$$\text{Mod.} \; (\delta) = \frac{2 \pi h R_1^2}{B T} \cdot \frac{\sigma^3}{1 + 2 \sigma \cos \tau + \sigma^2} \quad . \; . \; . \; (21)$$

Telle est l'amplitude de la composante en question, dans la lumière réfléchie.

§ 23. Il s'agit maintenant de savoir si ce résultat peut encore être admis pour le fer et l'acier. Chez ces matières, la constante magnétique ϑ, dans le cas de forces magnétiques qui agissent

---

[1]) σ a ici une autre signification qu'au § 18.

pendant un temps assez long, diffère beaucoup de la constante ϑ_1 pour l'air $\left(\frac{1 + 4\pi\vartheta}{1 + 4\pi\vartheta_1}\right.$ acquiert même la valeur $\left.400\right)$, et il n'y a pas à douter que la formule (21) serait complètement inexacte si le métal avait la même constante magnétique vis-à-vis de forces magnétiques rapidement variables, telles qu'elles se présentent dans les vibrations lumineuses.

Si l'on considère, toutefois, que sous l'influence du magnétisme les molécules du fer subissent une rotation et qu'une certaine masse est donc mise en mouvement, il paraîtra très possible que, pendant les vibrations lumineuses, les molécules n'ont pas le temps de suivre d'une manière appréciable les forces magnétiques et que par conséquent, pour ces mouvements, ϑ n'est pas sensiblement plus grand dans le métal que dans l'air. Effectivement, dans la réflexion ordinaire par l'acier, rien n'a décelé, que je sache, l'influence que devrait avoir, dans ce cas, une forte valeur de ϑ [1]): la réflexion sur l'acier suit les mêmes lois que celle sur tout autre métal.

Dans le problème dont nous nous sommes occupés ici, il y a encore une circonstance de nature à réduire notablement la valeur de ϑ. Le métal, en effet, était placé dans un champ magnétique puissant, et il est facile de voir que lorsque le fer, dans une certaine direction, a déjà acquis complètement ou presque complètement le maximum de moment magnétique, de petites forces accessoires susciteront des moments plus faibles que si la première magnétisation n'existait pas.

J'espère plus tard pouvoir revenir sur ces questions; provisoirement, toutefois, il ne me semble pas improbable que la formule (21) puisse s'appliquer même au fer et à l'acier.

§ 24. On doit remarquer encore que, dans le calcul des §§ 16—22, il n'a pas été introduit, comme supposition néces-

---

[1]) Cette influence consisterait en ce que chez le fer et l'acier les propriétés de la lumière réfléchie, pour des angles d'incidence différents, ne pourraient être calculées, à l'aide de l'angle d'incidence principal et de l'azimut principal, de la même manière que chez les autres métaux.

saire, que le second milieu soit un métal. Un corps transparent doit également présenter un phénomène semblable à celui que M. Kerr a observé dans le fer, et de la formule générale (21) on peut facilement déduire Mod. (δ) pour un pareil corps. Dans ce cas, en effet, $\frac{R_{2)0)}}{R_1}$ est réel et égal à l'indice de réfraction n, de sorte qu'on a $\tau = 0$ et $\sigma = n$ et que le dernier facteur dans (21) devient

$$\frac{n^3}{(1+n)^2} \cdot$$

§ 25. La formule (21) montre que Mod. (δ), pour des matières différentes, est proportionnel, d'abord à la valeur que h a pour ces matières, et, en second lieu, à la fraction

$$F = \frac{\sigma^3}{1 + 2\,\sigma \cos \tau + \sigma^2} \cdot$$

Celle-ci peut être calculée pour chaque corps au moyen de ses propriétés optiques (pour un métal, au moyen de l'angle d'incidence principal A et de l'azimut principal H) [1]). C'est ainsi que je trouve pour l'acier ($A = 76°40'$, $H = 16°48'$) $F = 2,83$, pour l'argent ($A = 72°30'$, $H = 40°9'$) $F = 2,09$, tandis que pour le sulfure de carbone ($n = 1,6$) on a $F = 1,15$.

J'ai calculé la valeur de F pour l'argent, parce que dans les expériences de M. Hall ce métal a montré, après le fer, l'action la plus forte, de sorte qu'il est permis de croire que si, après le fer, quelque autre métal peut présenter un effet sensible dans l'expérience de Kerr, ce sera l'argent. M. Hall dit [2]) que la valeur de h pour le fer est à celle pour l'argent comme 78 à 8,6, et en combinant ce rapport avec les résultats que nous avons obtenus pour F, on trouve que pour l'argent Mod. (δ) sera environ 12 fois plus petit que pour le fer.

§ 26. Il importera maintenant de savoir si, quant à la grandeur absolue, les phénomènes observés par M. Kerr dans ses expériences

---

[1]) Voir ma *Theorie der terugkaatsing en breking*, p.168.

[2]) *Phil. Mag.*, X, p.323.

sur la réflexion sont en accord avec la valeur que M. Hall a trouvée pour h. Pour résoudre cette question, il faut d'abord faire subir une légère modification à la formule (21). Les valeurs réelles des quantités h et A — cette dernière entre dans B, en vertu de (14) — ne sont en effet pas égales aux valeurs observées h' et A', et cela à cause de la polarisation diélectrique et magnétique de l'air dans lequel les observations qui servent à déterminer ces quantités ont été faites. D'abord, on a [1])

$$A^2 = \frac{A'^2}{(1 + 4\pi\varepsilon_1)(1 + 4\pi\vartheta_1)},$$

ε_1 étant la constante de la polarisation diélectrique dans l'air. En second lieu, d'après (1), h est une quantité analogue à $\varkappa$ (savoir, le rapport d'une force électromotrice et d'un courant électrique), et l'on a donc [2])

$$h = \frac{h'}{1 + 4\pi\varepsilon_1}.$$

Si l'on remarque enfin que R_1 est la valeur inverse de la vitesse de propagation dans l'air, et qu'on peut donc poser $R_1 = A'$, la formule (21) devient

$$\text{Mod.}\,(\delta) = \frac{h'}{2\,T} \cdot \frac{\sigma^3}{1 + 2\,\sigma\cos\pi + \sigma^2}$$

et se prêtera alors à la comparaison avec des mesures absolues.

En terminant cette étude il convient de remarquer que dans ses expériences M. Kerr n'a qu'une seule fois opéré avec des rayons réfléchis perpendiculairement à la surface. Il est donc nécessaire d'étendre la théorie que nous venons de développer au cas des incidences obliques. C'est ce qu'a fait M. W. van Loghem, dans sa *Theorie der terugkaatsing van het licht door magneten.*

---

1) *Theorie der terugkaatsing en breking*, p.69.

2) *Ibidem*, p.44.

RAPPORT SOMMAIRE SUR L'ÉRUPTION DE KRAKATAU, LES 26, 27 ET 28 AOUT 1883;

PAR

R. D. M. VERBEEK.

Les recherches faites, en vertu d'une décision du Gouvernement, en date du 4 octobre 1883, sur la nature, l'extension et les conséquences des éruptions volcaniques de *Krakatau*, ont conduit à divers résultats intéressants, dont je donnerai ici un aperçu succinct. Un rapport détaillé est en voie de préparation, mais ne pourra paraître que dans quelques mois, l'exécution des nombreuses cartes et planches, qui l'accompagneront, demandant beaucoup de temps.

L'exploration a embrassé non seulement les îles du détroit de la *Sonde*, mais aussi les régions littorales des districts de *Lampong*, de *Bantam* et de *Batavia*, ravagées totalement ou en partie. Dans le détroit de la *Sonde* on a visité les îles *Merak*, *Toppers-hoedje*, *Dwars in den weg*, *Seboekoe*, *Sebesi*, *Lagoendi*, *Krakatau*, *Taboean*, *Prinsen-eiland*, les *Monnikrotsen* et *Meeuwen-eiland*; ensuite, la bande littorale de *Ketimbang* à *Kalianda* et l'intérieur des terres jusqu'à *Kesoegihan*, ainsi que le pied du *Radja Bassa*; la côte depuis *Hoeroen* jusqu'à *Teloeq Betoeng* et les environs du chef-lieu; la partie sud de la *Semangka-baai* (la partie nord était rendue inaccessible par la ponce), les kampoengs *Tampang* et *Blimbing* près du *Vlakken hoek*, *Java's* 1ste *punt* et la côte depuis *Tjaringin* et *Anjer* jusqu'à *Merak*. Le voyage, d'une durée de 17 jours, eut lieu à bord du *Kediri*, capitaine *'t Hoen*, bâtiment qui avait été cédé pour cette fin par le Chef des travaux du port de Batavia.

Au sujet des causes de la puissante éruption de *Krakatau*, de même que sur celles des éruptions volcaniques en général, il n'y a guère d'indications à donner. Quelque chose pourtant, dans le cas actuel, en peut être dit. *Krakatau* est située, avec plusieurs autres volcans, sur une fente ou fracture de l'écorce terrestre, fente qui passe droit à travers le détroit de la *Sonde* et sur l'existence probable de laquelle j'ai le premier attiré l'attention, il y a un peu plus de 3 ans. Le long d'une pareille fente peuvent s'opérer de petits glissements de la croûte terrestre, d'où résulte une pression sur les matières fondues qui se trouvent au-dessous de la croûte; le long d'une semblable fracture, si bien fermée qu'elle soit par les masses minérales adjacentes, l'eau peut aussi affluer plus facilement qu'ailleurs dans les espaces souterrains; lorsque cette eau arrive en contact avec les matières fondues, il se forme de la vapeur à haute température et à pression très élevée, et c'est vraisemblablement cette vapeur qui doit être regardée comme le moteur principal dans la plupart des éruptions volcaniques, sinon dans toutes. Beaucoup de circonstances se réunissent donc pour faire que les éruptions se produisent de préférence sur les lignes de fracture, à la seule condition que l'eau (eau de pluie ou eau de mer) puisse s'y introduire en quantité suffisante. Du repos bi-séculaire des volcans du détroit de la *Sonde*, nous devons donc conclure que l'afflux d'eau a été faible durant cette période et qu'il n'a augmenté que dans les dernières années. Or, justement dans ces dernières années, notre crevasse a été le théâtre d'une foule de tremblements de terre, dont a eu surtout à souffrir le phare de *Java's 1ste punt.* La secousse la plus violente se fit sentir le 1er septembre 1880; elle détermina la rupture de la partie supérieure de la tour, qui plus tard dut être démolie. Ces tremblements de terre étaient probablement dus à des effondrements souterrains, et je crois pouvoir admettre que ceux-ci ont produit le long de notre crevasse des modifications, par suite desquelles l'eau de mer a pu s'infiltrer en plus grande abondance qu'antérieurement. Dans les 3 dernières années, la tension de la vapeur d'eau formée

est devenue assez forte ponr refouler la lave, des régions beaucoup plus profondes qu'elle occupe, dans la cheminée du cratère de *Krakatau*, et l'éruption a eu lieu lorsque la vapeur a enfin pu se frayer violemment, *à travers la lave*, un passage vers l'évent volcanique et la surface du sol. Lors de ce passage, une portion de la lave a été entraînée et projetée, en majeure partie sous forme de fine poussière, en dehors du cratère. La structure poreuse des matières éjaculées — il se forma presque exclusivement de la ponce — doit indubitablement être attribuée a la vapeur d'eau, chassée avec une grande force à travers la lave.

Une exposition plus détaillée de la manière dont l'éruption proprement dite a été préparée et accomplie ne pourra être donnée que plus tard, des dessins étant nécessaires pour la parfaite intelligence du sujet. Ici je me bornerai à remarquer encore que, par l'éruption de *Krakatau*, nos idées sur la forme et l'étendue des espaces souterrains seront probablement beaucoup modifiées. S'il est permis d'admettre un rapport entre notre éruption, la recrudescence d'activité que les volcans de l'*Archipel indien* ont montrée depuis cette époque, et les tremblements de terre qui ont été ressentis en *Australie* pendant et après les éruptions des derniers jours — coïncidence en tout cas très remarquable — on devra regarder comme probable que les espaces en question ont des dimensions beaucoup plus considérables que les géologues actuels ne leur en supposent habituellement.

Krakatau est le seul point qui ait travaillé. Des récits circulent suivant lesquels *Sebesi* et le *Radja Bassa* auraient également été en activité, mais cela est inexact.

De l'ancienne île de *Krakatau* il n'existe aucun lever détaillé; pour se former une idée des formes du terrain, on n'a que les cartes marines anglaise et hollandaise, toutes les deux à petite échelle, et une couple de croquis faits par M. Buijskes, en 1849, et par moi, en 1880. Ces deux croquis montrent que l'île possédait trois sommets; le plus septentional, le *Perboewatan* (nommé *Roewatan* dans quelques rapports) était le moins élevé des trois et présentait des coulées de lave sur plusieurs côtés; c'est ce

sommet qui est entré le premier en activité, au mois de mai 1883, et qui probablement avait aussi projeté des ponces en 1860. Le sommet du milieu, qui portait le nom de *Danan*, a également été à l'œuvre, en août 1883. Le pic situé le plus au sud, le mont *Rakata* proprement dit (nom qui par corruption s'est changé en *Krakatau*), était de beaucoup le point le plus élevé de l'île entière: la carte marine lui donne 822 mètres d'altitude. Ce point aussi est un ancien cratère, mais qui n'a pas travaillé en 1883.

Le 20 mai 1883, le *Perboewatan* manifesta subitement son activité; si, avant cette date, on n'a rien su de l'approche d'une éruption, cela tient sans doute à la circonstance que *Krakatau* était inhabitée et seulement visitée de temps en temps par des pêcheurs de Lampong, qui ne s'éloignaient pas du rivage; il serait inadmissible que rien n'eût présagé cette éruption.

Les éruptions continuèrent avec une intensité variable, et avec des intervalles de repos, jusqu'au 26 août. Vers la fin de cette phase, le cratère du mont *Danan* entra également en action. Bien que non dépourvues d'importance en elles-mêmes, ces éruptions étaient insignifiantes comparées à ce qui devait suivre. Le 11 août, des arbres croissaient encore sur le pic, de sorte qu'à ce moment la destruction de la végétation restait limitée au voisinage immédiat des cratères. Le 26, les explosions augmentèrent beaucoup en intensité, pour atteindre leur maximum le 27, à 10 heures du matin. Elles perdirent alors de leur violence, mais n'en continuèrent pas moins pendant toute la nuit du lundi au mardi, jusqu'à ce qu'enfin, le 28, vers 6 heures du matin, elles cessèrent.

Relativement aux éruptions qui se sont succédé depuis le mois de mai jusqu'au 26 août, on n'a pas, en général, appris grand' chose d'intéressant; tous les renseignements que j'ai pu recueillir à ce sujet seront communiqués dans le rapport détaillé.

Les éruptions du 26 et du 27 août furent accompagnées de violentes détonations et vibrations atmosphériques. Pendant ces deux jours, on entendit presque sans interruption un bruit sourd,

semblable au grondement du tonnerre dans le lointain; les explosions proprement dites étaient accompagnées d'éclats courts, comparables à de forts coups de canon, tandis que les détonations les plus violentes étaient encore beaucoup plus brèves et plus crépitantes et ne se laissaient comparer à aucun autre bruit.

Les bruits des éruptions du mois de mai furent encore entendus, dans la direction N.-O., à *Moeara Doea*, résidence de *Palembang*, et à *Bintoehan*, district de *Kauer*, résidence de *Benkoelen*, localités situées respectivement à 230 et 270 kilomètres de *Krakatau*; mais la propagation du son, telle qu'elle eut lieu le 26 août, surpasse tout ce qui est connu en ce genre. Les coups ont été entendus à *Ceylan*, au *Birman*, à *Manille*, à *Doreh* sur la *Geelvinkbaai* en *Nouvelle-Guinée*, et à *Perth* sur la côte occidentale de l'*Australie*, ainsi que dans tous les lieux plus rapprochés de *Krakatau*. Si, de *Krakatau* comme centre, on décrit un cercle avec un rayon de 30°, ou 3333 kilomètres, ce cercle passe précisément par les points les plus éloignés où le bruit ait été perçu. La distance des points extrêmes, à l'est et à l'ouest, est donc de 60° (le diamètre du cercle), ou $\frac{1}{6}$ de la circonférence entière du globe. La superficie de ce cercle, ou plutôt de ce segment sphérique, est de plus du 15ième de la superficie de la terre. Dans les temps historiques, on ne connaît pas d'éruption dont les bruits se soient propagés sur une si énorme étendue. Lors de l'éruption du *Tambora*, dans l'île de *Soembawa*, en 1815, le rayon du cercle dans lequel le bruit fut entendu était moitié moindre, c'est-à-dire de 15°, et la superficie était donc 3,93 fois plus petite.

Si, avec le même rayon de 30°, on trace un cercle sur la terre en prenant pour centre *Amsterdam*, ce cercle a le parcours suivant. Le point le plus septentrional tombe par 82° lat. N., donc au nord du *Spitzberg*; de là, le cercle se dirige vers le centre de la *Nouvelle-Zemble*, puis le long de la chaîne de l'*Oural*, sur *Orenbourg*, *Tiflis*, *Damas*, *Jérusalem*, *Suez*; il coupe ensuite le tropique du Cancer par environ 15° long. E. de Gr., atteint son point le plus méridional par 22° lat. N., dans le désert du

Sahara, coupe de nouveau le tropique du Cancer par 5° long. O. de Gr., passe près de l'*Ile de Fer*, embrasse les *Canaries* et les *Açores*, ainsi que la plus grande partie du *Groënland*, et revient ainsi à son point de départ, au nord du *Spitzberg*.

En divers endroits on a observé que les détonations les plus fortes correspondaient à des heures différentes, et il est aussi arrivé qu'en des lieux plus rapprochés le bruit n'était souvent perçu que faiblement, ou pas du tout, tandis qu'en des points plus éloignés il était entendu très distinctement. Ainsi, par exemple, le coup le plus fort a été entendu à *Buitenzorg*, le 27, à sept heures moins un quart du matin, à *Batavia* à huit heures et demie, à *Teloeq Betoeng* à dix heures. Cela tient principalement à la direction du vent; il ressort clairement des rapports que les bruits avaient le plus de force à ce côté de *Krakatau* vers lequel soufflait le vent et étaient chassées les fines particules de cendre. Mais ainsi ne s'explique pas encore le fait qu'à des distances plus grandes le bruit était parfois plus distinct qu'à des distances moindres, lorsque les lieux comparés se trouvent dans la même direction relativement à *Krakatau*, comme cela est le cas, par exemple, pour *Anjer*, *Serang* et *Batavia*. Ce phénomène doit probablement être attribué aux grandes masses de particules de cendre répandues dans les couches inférieures de l'atmosphère. Si l'on suppose, par exemple, un gros nuage de cendre suspendu entre *Krakatau* et *Anjer*, ce nuage agira sur les ondes sonores comme un coussin épais et moelleux; à côté et par-dessus le nuage, le son pourra alors très bien se propager vers des points plus éloignés, tels que *Batavia*, tandis qu'à *Anjer*, immédiatement derrière le nuage de cendre, on ne percevra aucun bruit, ou seulement des bruits très faibles. D'autres explications, par exemple au moyen de l'interférence du son, me paraissent moins acceptables, quoique non absolument impossibles.

Outres ces vibrations sonores, il s'est formé aussi, lors des explosions, des ondes aériennes plus longues et très longues, qui ne se sont pas manifestées par des tons, mais qui n'en ont pas moins produit des effets très remarquables. Les plus rapides

de ces vibrations se communiquaient naturellement aux édifices et aux cloisons des chambres, de sorte que les objets suspendus à ces cloisons, ou au plafond, entraient en mouvement. C'est ainsi, par exemple, qu'à *Batavia* et à *Buitenzorg*, à une distance de 150 kilomètres de *Krakatau*, des portes et des fenêtres furent secouées avec bruit, des horloges s'arrêtèrent, des statuettes placées sur des armoires furent renversées, des réservoirs de lampes suspendues sautèrent de leurs suspensions et tombèrent à grand fracas, avec verres et globes, sur le sol.

Mais ce n'est pas à cette distance seulement que la vibration de l'air s'est fait sentir. A *Batoe-Radja* en *Palembang* (250 kilom. de *Krakatau*), à 3 heures du matin, des lézardes se produisirent à la caserne des Pradjoerits; à *Palembang* même, 350 kilom. de *Krakatau*, différents bâtiments de l'Etat durent être évacués, parce qu'ils menaçaient ruine; bien plus, sur la terre *Alkmaer*, en *Passoeroean*, à 850 kilomètres de *Krakatau*, les murs se crevassèrent dans les habitations de l'administrateur et du machiniste. Tout cela était l'effet de vibrations aériennes, et *non* de tremblements de terre, qui dans cette éruption, chose digne de remarque, n'ont nulle part été observés avec certitude.

Enfin, les explosions les plus violentes ont encore donné naissance à des ondulations atmosphériques d'une longueur d'onde prodigieuse. L'Institut météorologique de *Batavia* ne possédant plus de baromètre enregistreur, ces ondulations auraient passé inaperçues en cette ville, si, heureusement, elles n'avaient été inscrites par l'indicateur de l'usine à gaz. Cet appareil, à enregistrement automatique, marque d'une manière continue, sur une feuille de papier enroulée autour d'un cylindre tournant, la pression du gaz. Or, le grand gazomètre de l'usine ayant, le 26 et le 27 août, été mis en mouvement par la pression des ondes atmosphériques, l'indicateur a noté ces oscillations, et la courbe de la pression ne présente plus, ces jours-là, la forme normale, mais une foule de dentelures. A l'aide des lignes horaires tracées sur le papier, on peut déterminer exactement l'heure où ces oscillations ont été inscrites, et, en retranchant le temps

nécessaire à l'onde pour arriver de *Krakatau* à *Batavia*, on trouve l'instant où l'onde s'est formée et où l'explosion a eu lieu (abstraction faite d'une correction pour le temps qui s'écoule entre le moment où la pression est exercée sur le gazomètre et celui où cette pression est inscrite par l'indicateur, intervalle qui malheureusement n'est pas connu avec précision). Les observations barométriques faites en Europe et en Amérique ont appris que ces grandes ondes aériennes possèdent une vitesse égale, ou presque égale, à la vitesse du son, d'où il suit qu'elles ont besoin de 7 minutes pour parcourir la distance de *Krakatau* à *Batavia*.

J'ai déduit de là que les éruptions les plus fortes ont eu lieu aux heures suivantes: 27 août, $5^h\ 35^m$, $6^h 50^m$, $10^h 5^m$, et $10^h 55^m$, temps de *Batavia*. De ces quatre, la plus violente, de beaucoup, a été l'explosion de $10^h 5^m$. Aussi est-il parti alors de *Krakatau* une onde aérienne qui, autour de ce point comme pôle, s'est étendue annulairement à la surface du globe, dont elle a parcouru jusqu'à 3 fois et $\frac{1}{4}$ la circonférence entière. La vitesse, ainsi qu'il a déjà été dit, égalait à peu près celle du son, bien qu'il s'agisse ici d'ondes d'une longueur colossale (longueur d'onde des tons les plus graves que l'oreille puisse percevoir, environ 20 mètres; longueur d'onde de l'ondulation aérienne de *Krakatau*, plus d'un million de mètres).

Les éruptions, qui d'abord avaient eu lieu au-dessus du niveau de la mer, sont devenues sous-marines probablement vers 10 heures du matin, le 27 août. Jusque-là, il n'avait été rejeté que de la cendre plus ou moins humide, mais, à partir de ce moment, fut aussi éjaculée une grande quantité de boue, mélange de sable volcanique et d'eau de mer. L'effondrement de la partie septentrionale de la montagne doit avoir précédé ces éruptions sous-marines, comme on peut l'inférer du temps où la grande onde liquide, qui a probablement eu pour origine l'effondrement en question, a inondé le *Vlakke Hoek*. Lors de cet effondrement, un grand changement s'est produit dans le groupe d'îles de *Krakatau*. Au N. O. de *Krakatau* est situé le *Verlaten-eiland*,

au N. E. le *Lang-eiland*, et à l'ouest de cette dernière île se trouvait le *Poolsche Hoed.* Ce dernier îlot a disparu, les deux autres îles existent encore et ont même été agrandies par les matières éjaculées, qui se sont déposées à leur surface et le long de leurs bords. Le plus grand changement, toutefois, a été subi par *Krakatau* même. Toute la partie septentrionale, avec les cratères *Perboewatan* et *Danan* et la moitié du pic s'est engloutie dans la profondeur. On ne voit plus se dresser aujourd'hui que la moitié sud du pic, lequel a été coupé juste par son point le plus élevé et présente au côté septentrional une magnifique falaise de plus de 800 mètres de hauteur. L'effondrement a donc donné naissance à une coupe volcanique qui n'a probablement pas sa pareille au monde. Un dessin en couleurs de ce remarquable escarpement sera joint à mon rapport détaillé.

Krakatau occupait autrefois une étendue de 33½ kilomètres carrés, dont 23 se sont abimés; il reste donc 10½ kil. carrés. Mais, aux côtés sud et sud-ouest, l'île s'est accrue d'une ceinture de produits éruptifs, de sorte que la superficie de *Nieuw-Krakatau* est maintenant, d'après notre lever, de 15½ kilom. carrés. *Lang-eiland*, qui jadis mesurait 2.9 kilom. carrés, en a aujourd'hui 3.2. *Verlaten-eiland* a reçu un accroissement très considérable; sa superficie, autrefois de 3.7 kilom. carrés, s'élève actuellement à 11.8 kilom. carrés. Du *Poolsche Hoedje*, il ne subsiste plus rien.

A la place occupée jadis par *Krakatau* on trouve maintenant partout une mer profonde, où la sonde descend le plus souvent à 200 m. et même, en quelques points, à 300 m. Un fait curieux, c'est qu'au milieu de cette mer profonde un rocher est resté debout et se dresse à environ 5 mètres au-dessus de la surface des eaux. Tout à côté de ce rocher, qui ne mesure certainement pas plus de 10 m. en carré, la profondeur de la mer dépasse 200 m. C'est comme une gigantesque massue, que *Krakatau* élève, menaçante, de son sol effondré.

Les produits de l'éruption de 1883 consistent presque exclusivement, comme je l'ai déjà dit, en ponces; çà et là seule-

ment l'attention est attirée, au milieu de ces matières gris clair, par quelque fragment de rétinite, de couleur plus foncée, ou par un petit fragment d'obsidienne, d'aspect complètement vitreux. Quoique, dans le cratère, la masse pierreuse ait sans nul doute été liquide, nulle part la lave n'a pu s'échapper en coulée, parce que tout a été éjaculé sous forme de débris plus ou moins gros et le plus souvent à l'état pulvérulent.

La *composition chimique* des matières rejetées n'a pas encore été suffisamment étudiée, mais, des analyses exécutées jusqu'ici, il paraît résulter que tous ces produits ne contiennent pas la même quantité d'acide silicique; peut-être les gros blocs, flottant à la surface de la masse fondue, étaient-ils un peu plus acides que la lave qui se trouvait à une plus grande profondeur dans le cratère et qui a été éjaculée à l'état de cendres. De la cendre recueillie par moi-même à *Buitenzorg* contenait, d'après des analyses faites à *Batavia*, 60°/₀ de silice, un fragment de ponce provenant de l'île *Calmeyer* en renfermait 68°/°, un fragment d'obsidienne de *Krakatau* un peu plus de 68°/₀, et une cendre jaune et fine de la côte orientale de *Krakatau* jusqu'à 70°/₀. On a trouvé, en outre: alumine 14—16°/₀, oxydule de fer 6°/₀, chaux 4°/₀, soude 4 à 6°/₀ et un peu de magnésie.

L'*examen microscopique* de la cendre recueillie à *Buitenzorg*, préalablement soumise à la lévigation, a fait reconnaître: 1° Du *verre*, en très nombreuses particules à contours irréguliers, ordinairement criblées de pores à air, arrondis ou oblongs; dans quelques particules, les fils du verre sont courbés. Ces particules vitreuses, fragments microscopiques de ponce, sont toujours en proportion prédominante. 2° Des *feldspaths*, très frais et limpides, montrant parfois distinctement les stries des macles binaires polysynthétiques, mais le plus souvent en cristaux simples; le tout paraît être de la plagioclase, l'analyse n'indiquant pas de potasse. Comme inclusions, on trouve dans ce feldspath du verre, de l'apatite, de l'augite et de la magnétite. 3° Du *pyroxène*, en partie de couleur verte et alors éteignant obliquement, donc de l'*augite monocline*, en partie de couleur brune et alors, à ce qu'il

paraît, éteignant toujours parallèlement; il n'est pas encore tout à fait certain si ces dernières augites, beaucoup plus abondantes que les vertes, appartiennent à un pyroxène *rhombique* (bronzite ou hypersthène), ou si ce sont des augites monoclines brunes, reposant, dans les préparations, sur l'orthopinacoïde; ce serait là, sans doute, une circonstance accidentelle, mais qui n'aurait rien de surprenant si, dans ces cristaux, l'orthopinacoïde est beaucoup plus développé que le clinopinacoïde. Chez un de ces cristaux bruns je crois aussi avoir observé l'extinction oblique, et parfois on trouve des passages des teintes brunes aux vertes. 4° De la *magnétite*, en grains et en octaèdres, constituant l'élément le plus ancien. La proportion de magnétite diminue dans la cendre à mesure que celle-ci est tombée plus loin de *Krakatau.*

Si la masse fondue s'était refroidie lentement, elle aurait donné naissance à une andésite augitique ordinaire ou à une rétinite andésitique (avec pyroxène rhombique).

Le volume des fragments rejetés décroît en général à mesure qu'on s'éloigne de *Krakatau*; les matériaux grossiers sont tombés en majeure partie à l'intérieur d'un cercle décrit autour de *Krakatau* avec un rayon de 15 kilomètres, bien que des fragments de la grosseur du poing aient encore été lancés jusqu'à la distance de 40 kilomètres. En dedans du cercle de 15 kilomètres de rayon, l'épaisseur des couches de débris est de 20 à 40 mètres. Sur le revers de l'île de *Krakatau*, l'épaisseur des monticules de cendres est même en certains points, au pied du pic, de 60 à 80 mètres, mais elle diminue vers le haut, de sorte que, dans les profonds sillons que les pluies ont déjà creusés dans ces dépôts, l'ancienne surface de la montagne et les arbres renversés reparaissent au jour.

Au moment de ma visite, les puissantes couches de cendres étaient refroidies à la surface, mais vers le bas elles conservaient encore beaucoup de chaleur; aussi, dans les ravins profonds, de l'eau chaude et de la vapeur se montraient-elles partout. Au *Verlaten-eiland*, au *Lang-eiland*, aux îles *Steers* et *Calmeyer*, et même à *Sebesi*, on voyait également, çà et là, se dégager

de la vapeur. A *Krakatau* il y a, en outre, des arbres carbonisés par la cendre brûlante et qui. au bord de la fracture, où l'air trouve accès, continuent à se consumer lentement; il en résulte que, la nuit, on observe çà et là des lueurs de feu et de la fumée. Ce sont surtout ces petits feux qui ont donné naissance au bruit que *Krakatau* travaillait encore.

L'ascension de la montagne, du côté postérieur, par-dessus les monticules de ponce, offre des difficultés, mais est pourtant exécutable; ce qui la rend surtout très fatigante, ce sont les nombreux ravins dans lesquels il faut à chaque instant descendre, sous les rayons d'un soleil ardent, qu'aucune ombre ne tempère. En partant de l'angle nord-ouest, et longeant à peu de distance le bord de la fracture, on peut monter jusqu'à environ 20 mètres du point le plus élevé, qui, d'après nos mesures, est à 831 mètres au-dessus du niveau de la mer; le pourtour du sommet même est crevassé et s'émiette continuellement.

Entre *Krakatau* et *Sebesi* gît une immense quantité de cendres et de ponces, qui a presque entièrement comblé la mer, au-dessus de laquelle elle fait saillie en une couple de points. A ces deux points, on a donné les noms de *Steers-eiland* et *Calmeyer-eiland*, Ces îles ne dépassent que de quelques mètres le niveau de l'eau; elles ont beaucoup à souffrir du choc des vagues, n'étant composées que de matières meubles, et bientôt elles auront disparu. Les 16 petits cratères dénoncés entre *Sebesi* et *Krakatau*, et réduits à 6 ou 4 dans des relations postérieures, n'ont jamais existé. On a pris pour des volcans en travail les amas de débris fumants, méprise qui, de loin et dans les premiers temps après la catastrophe, a dû se commettre très facilement.

Les cendres fines ont été emportées dans la direction E. S. E. jusque près de *Bandoeng* (250 kilomètres de *Krakatau*), dans la direction N. N. O. jusqu'à *Singapore* et *Bengkalis*, respectivement à 835 et 915 kilomètres de *Krakatau*, dans la direction S. O. jusqu'à *Kokos-eiland* (île *Keeling*), 1200 kilomètres de *Krakatau*; à l'O., au N. et aus S., on ignore jusqu'à quelle

distance la cendre est tombée; la superficie est au moins de 750.000 kilomètres carrés, à peu près égale à celle de la *Suède* et de la *Norwège*, plus grande que celle de la Monarchie *Austro-Hongroise*, plus grande aussi que celle de l'*Empire germanique* avec le *Danemark* (y compris l'*Islande*), enfin, 21 fois plus grande que celle des *Pays-Bas*.

Evidemment, les vents régnants du S. E. et du N. E. ont fait avancer les particules, d'où il est résulté que le contour de la surface couverte par les cendres a formé une courbe irrégulière.

Des particules encore plus fines sont même tombées en dehors de cette ligne, dans la mer, ainsi qu'on l'a appris par les récits des navigateurs; enfin, les particules d'une ténuité excessive, mêlées à une grande quantité de vapeur d'eau, sont restées suspendues très longtemps dans les couches supérieures de l'atmosphère, et, poussées par le vent, ont fait un voyage autour du monde. La vapeur s'est condensée en eau, qui a été congelée par le froid des hautes régions; la réfraction à travers les innombrables petits cristaux de glace a occasionné les belles lueurs rouge foncé qui, durant les derniers mois, ont été observées, quelque temps après le coucher du soleil, sur tant de points, en *Asie*, en *Afrique*, en *Europe* et en *Amérique*; en même temps, les particules de cendre obscurcissaient plus ou moins la lumière du soleil, ou communiquaient à cet astre, au moment de son lever et de son coucher, des teintes bleues et vertes. Si l'on considère que le volume des matières solides éjaculées s'élève déjà à plusieurs kilomètres cubes, et que les produits gazeux émis possédaient peut-être un volume des centaines de fois plus grand, l'hypothèse d'un nuage de glace cosmique, invoquée pour expliquer les phénomènes météorologiques, paraîtra sans doute entièrement superflue.

Une preuve directe du fait, que dans les couches supérieures de l'atmosphère des particules de cendre ont été entraînées très loin, a été fournie déjà par de la neige tombée en *Espagne* et de la pluie recueillie aux *Pas-Bas*, dans lesquelles on a trouvé

les mêmes élements que dans la cendre de *Krakatau*; quant à la très grande hauteur à laquelle, lors des dernières et violentes éruptions, les particules ont dû être lancées, on peut l'inférer de la circonstance que le 20 mai, dans une des toutes premières éruptions, le nuage de fumée aurait déjà atteint — d'après des *mesures* faites à bord de l'*Elisabeth*, corvette de guerre allemande, qui ce jour-là avait quitté *Anjer* à 9 heures matin — une élévation d'au moins 11000 mètres. Si cette information mérite confiance, il est donc très possible que, lors des explosions beaucoup plus violentes des 26 et 27 août, la hauteur de projection ait été de 15 à 20 kilomètres.

Une évaluation aussi exacte que posssible de la quantité des matières solides rejetées m'a donné le chiffre de 18 *kilomètres cubes*. Dans les cas douteux, j'ai toujours pris les nombres les plus petits, de sorte que le chiffre de 18 kil^3. peut bien être trop faible, mais non trop fort. L'erreur possible ne dépasse pas, d'après mon estimation, 2 à 3 kilomètres cubes.

Si considérable que soit ce volume, il reste pourtant beaucoup au-dessous de celui que le *Tambora* a fourni en 1815, et que Junghuhn évalue à 317 kilomètres cubes; cette dernière évaluation, toutefois, ne repose que sur des données peu nombreuses, et je suis porté à croire qu'un volume de 150 à 200 kilomètres cubes se rapprocherait plus de la vérité. Même dans ce cas, le chiffre serait encore 8 à 11 fois plus fort que le nôtre, ce qui d'ailleurs ne doit pas surprendre, puisqu'à *Madoera*, à plus de 500 kilomètres du *Tambora*, le soleil fut alors complètement obscurci pendant *trois jours*, tandis qu'ici, lors de la catastrophe de 1883, l'obscurité ne dura qu'un *petit nombre d'heures*.

De ces 18 kil^3., représentant un poids de plus de 36×10^{12} kilogrammes, il n'y en a pas moins de 12, ou les $^2/_3$ de la masse totale, qui sont déposés à l'intérieur du cercle décrit autour de *Krakatau* avec un rayon de 15 kilomètres. Comme la mer entre *Krakatau* et *Sebesi* n'était profonde que de 36 mètres, en qu'en cet endroit l'épaisseur des couches de débris atteint environ le même chiffre, la navigation est devenue en-

tièrement impossible dans ces parages. Un peu plus loin l'épaisseur diminue très fort. A la distance de 15 à 22½ kilomètres de *Krakatau*, l'épaisseur n'est plus, en moyenne, que de 1 à 1½ m.; dans cet anneau se trouve *Sebesi*, qui maintenant ne présente qu'un monceau de cendre, d'où émergent seulement quelques courts tronçons d'arbres; rien ne subsiste plus des quatre kampoengs populeux qui s'élevaient dans la plaine vis-à-vis de l'îlot *Mengoenang* (*Huismans-eiland*), tout a été emporté par les vagues, et une couche de cendres, épaisse de 1 mètre, recouvre le sol. De 22½ à 40 kilomètres, l'épaisseur moyenne des cendres est 0^m, 3, puis, jusqu'à 50 kilomètres, 0^m, 2. A une distance encore plus grande de *Krakatau*, l'épaisseur s'abaisse rapidement à 2, 1 et ½ centimètres, mais ici, plus les matières deviennent fines, plus l'influence de la direction du vent se fait sentir. Une petite carte des cendres sera jointe au rapport détaillé.

Un dernier et très important phénomène, auquel l'éruption a donné lieu, est la production d'énormes vagues, qui ont submergé les côtes basses du détroit de la *Sonde*, détruit une foule de kampoengs et coûté la vie à plus de 35000 personnes.

Au sujet de l'heure où ces ondes ont apparu, il règne beaucoup d'incertitude, et cela n'est guère étonnant. Le nombre des Européens qui, sur les divers points du littoral ou à bord des navires, assistèrent à la catastrophe, n'était déjà pas considérable; presque tous, en outre, se trouvaient dans un état de surexcitation extrême, de sorte qu'ils n'ont songé que très exceptionnellement à regarder l'heure à la montre. La plupart des déterminations de temps ne furent donc que des estimations grossières, qui, surtout celles faites après que l'obscurité fut survenue, ne méritent pas grande confiance. On s'explique de cette manière que les déterminations de l'heure d'un même évènement, dans le même lieu, par deux personnes différentes, aient pu différer entre elles, comme j'en ai eu la preuve, de une heure et demie.

Un fait remarquable est encore à noter à ce sujet, savoir, que la plus puissante des vagues en question, celle qui a de

beaucoup surpassé les autres en hauteur, la seule qui se soit propagée à de grandes distances le long de la côte septentrionale de *Java* et dans la direction du sud-ouest, n'a été vue presque nulle part; à *Tjaringen* seulement on l'a vue arriver un peu avant que l'obscurité ne se produisît, ce qui a eu lieu vers 10 heures du matin, le 27. *Anjer* avait été ravagé dès 6 heures du matin, puis abandonné. A *Teloeq Betoeng* et aux phares du *Vlakke hoek* et de *Java's* 1ste *punt*, cette lame n'a pas été vue, à cause de l'obscurité profonde qui y régnait; à *Java's* 1ste *punt*, sur le phare situé à 40 mètres au-dessus du niveau de la mer, on n'avait même rien remarqué du passage de l'onde, et ce n'est que le lendemain, lorsque la clarté reparut, qu'on découvrit la dévastation de la région littorale.

Comme la grande obscurité est survenue à *Bantam* peu après la forte explosion de 10^h5^m, — la même qui a aussi donné naissance à la grande onde aérienne, — et que la lame, avant la production de l'obscurité, n'eut que le temps d'atteindre la localité voisine *Tjaringin*, située à 47 kilomètres de *Krakatau*, la formation de cette lame ne peut avoir eu lieu beaucoup plus tôt que $9^h 50^m$ ou $9^h 55^m$. Au *Vlakke Hoek*, 103 kilomètres de *Krakatau*, la lame arriva à environ $10^h 30^m$, ce qui s'accorde bien avec notre détermination du temps, si l'on prend en considération que la vitesse des ondes dans la direction du *Vlakke Hoek* a été, à cause de la profondeur supérieure de la mer, plus grande que dans la direction de *Tjaringin*.

Il est donc très probable que, peu avant dix heures, a eu lieu l'effondrement des parois creuses de l'un des cratères en activité, ou des deux cratères à la fois; que l'eau a ainsi pu pénétrer en grande abondance, et qu'alors la moitié du grand pic, *déjà complètement miné et crevassé par les éruptions*, s'est également abîmée. La cause du grand ébranlement de la mer doit sans doute être cherchée dans l'effondrement du pic. De la partie septentrionale de l'île il ne devait guère rester, après les nombreuses éruptions, qu'une coque creuse, dont l'écroulement n'a pu déterminer des ondulations bien importantes; la

pénétration de l'eau ne devait pas non plus produire de fortes ondes, mais aura plutôt eu pour effet une aspiration vers *Krakatau*, et telle peut avoir été la cause du retrait de la mer, qui s'est manifesté sur différents points de la côte *avant* l'arrivée de la grande lame.

Quant au pic lui-même, il était encore massif, et j'ai calculé que la partie écroulée de cette montagne seule, donc sans le *Danan* et le *Perboewatan*, avait un volume d'au moins 1 kilomètre cube. L'immersion subite d'une pareille masse a dû donner naissance, autour de *Krakatau*, à une immense vague annulaire.

Il y a eu toutefois encore d'autres ondes, de moindre importance: une le dimanche, 26 août, à 5^h ou $5^h\frac{1}{2}$ du soir, une ou deux pendant la nuit, puis, le lundi matin à 6 heures, une onde qui ravagea *Anjer*. Ces ondes beaucoup plus petites, on peut difficilement les attribuer à l'effondrement de portions de la montagne, parce qu'alors aussi la mer aurait probablement pénétré dans le cratère et qu'on eût eu déjà beaucoup plus tôt des éruptions boueuses: à moins de supposer que ces éruptions ont effectivement eu lieu, mais que nulle part la boue n'a été lancée assez loin pour retomber sur les points habités, — ce qui n'est pas absolument impossible.

Si, à ce moment, il n'y a pas encore eu d'écroulements de la montagne, il ne reste plus qu'à admettre que les ondes en question ont été produites par la chute dans la mer des énormes masses de matières éjaculées. Ainsi qu'il a été dit plus haut, 12 kilomètres cubes de pierres et de cendres gisent autour de *Krakatau*, dans un faible rayon; cette quantité y a été jetée, il est vrai, à partir du 20 mai, mais en très majeure partie, à coup sûr, lors des violentes explosions des 26 et 27 août. Or, si l'on admet que, par exemple, un kilomètre cube de matières tombent presque à la fois dans la mer, il devra aussi en résulter des ondes, qui pourront même, comme je l'ai reconnu, atteindre une hauteur assez considérable.

La grande lame formée vers 10 heures a monté très haut, surtout contre les rivages escarpés du détroit de la *Sonde;* c'est

ainsi que nous avons mesuré: au phare du *Vlakke Hoek*, 15 mètres; à *Beneawang* (*Semangka*), hauteur incertaine; à *Teloeq Betoeng*, devant la maison de la résidence, 22 m.; à *l'Apenberg* (*Goenoeng Koenjit*), 24 m.; près de *Kalianda*, remonté contre un plan incliné, 24 m.; contre le côté sud de *Dwars in den Weg*, à peu près 35 m. (hauteur non mesurée); contre *Toppers hoedje*, au côté sud, 30 m., au côté nord, 24 m.; à *Merak* même, hauteur difficile à voir, l'ancienne habitation de l'ingénieur ne se trouvant qu'à 14 m. au-dessus de niveau de la mer; à environ 2 kilomètres au sud de *Merak*, 35 m.; au nord d'*Anjer*, sur la côte en face du *Brabandshoedje*, 36 mètres. La hauteur est donc partout différente et dépend de la situation des lieux, de leur éloignement de *Krakatau*, de la nature plus ou moins abritée et de l'escarpement de la côte. A *Sebesi* même, aucune trace de la lame n'est plus visible, tout ayant été enseveli sous une épaisse couche de cendre, tombée après le retrait de l'onde; à *Seboekoe*, la hauteur atteint de 25 à 30 m., mais n'a pas été mesurée.

La grande lame, qui doit être partie de *Krakatau* vers 9^h50^m environ, s'est propagée à de très grandes distances, entre autres jusqu'à *Ceylan*, *Aden*, *Maurice*, *Port-Elisabeth* dans l'Afrique australe, et même jusqu'aux côtes de *France*. La vitesse des ondes a naturellement été très diverse, car elle augmente avec la profondeur des mers; des renseignements détaillés, à ce sujet, ne pourront être donnés que plus tard, lorsque les indications de tous les marégraphes auront été reçues. Pour l'*Archipel indien* et une couple de points en dehors de cet archipel, j'ai trouvé les chiffres suivants: (Voir le tableau p. 171.)

Dans notre archipel la vitesse est faible, à cause du peu de profondeur de la mer, mais dans la mer profonde qui se trouve sur le trajet vers *Maurice* et le *Cap* la vitesse devient très grande, savoir, de plus de 300 milles marins par heure, vitesse qui n'est comparable qu'à celle de l'onde de la marée lunaire et à celle des ondes séismiques de *Simoda* au *Japon*, le 23 décembre 1855, et de *Tacna* au *Pérou*, le 13 août 1868.

Localités.	Vitesse en milles par heure.	Profondeur moyenne de la mer en mètres.
Noordwachter-eiland	37	37
Tandjong-Priok (*Batavia*).	36	35
Ondiepwater-eiland.	33	29
Dendang (*Billiton*).	31	26
Tandjong-Pandan (*Billiton*).	32	27½
Tjilamaja (*Krawang*)	31	26
(*Oedjoeng-Pangka* (près de *Soerabaja*)	29¼	23
Pasar Manna (*Benkoelen*).	113	344½
Padang	109	320½
Maurice (*Port-Louis*).	(364) ?	(3575)?
Port-Elisabeth.	306	2526

A l'aide de ces vitesses, on peut trouver la profondeur moyenne de la mer entre les points parcourus; j'ai consigné ces profondeurs dans le tableau, mais, à proprement parler, elles ne sont valables que lorsque la hauteur de l'onde est petite par rapport à la profondeur de la mer, ce qui dans notre archipel n'est pas strictement exact. Néanmoins, les nombres s'accordent assez bien avec la carte marine. Dans la détermination de l'heure à *Maurice* il paraît y avoir une erreur, car la profondeur moyenne ne saurait y offrir une différence si considérable avec celle de *Port-Elisabeth.*

Après ces effroyables crises, *Krakatau* rentra peu à peu dans le repos, mais non sans avoir encore mugi violemment pendant la soirée et la nuit du 27 au 28 août. Le soir, de 10 à 1 h., les coups et les détonations entendus à *Buitenzorg* n'étaient guère moins forts qu'ils ne l'avaient été le matin. Après le 28 août, toutefois, on n'a plus rien entendu du volcan. Les tableaux du marégraphe de *Tandjoeng Priok* montrent encore de petites oscillations jusqu'au 30 août à midi, mais, passé ce moment, la hauteur de l'eau était également redevenue normale.

Pourtant j'ai reconnu que, bien postérieurement au 28 août, il doit y avoir eu encore une éruption assez importante à *Krakatau*, et cela très peu de temps avant que je visitasse l'île.

Parti le 11 octobre de *Batavia*, avec mon personnel, j'arrivai le 15, après avoir touché différents points du détroit de la *Sonde*, à *Calmeyer*. Dans cette île, banc de sable ponceux, complètement nu et divisé par des anses en 7 fragments, nous nous arrêtâmes quelques heures, pour la mesurer en tous sens; cette opération eut lieu par une température de 42° C, qui nous laissa tous à demi suffoqués. Déjà ici, mon attention fut attirée par le fait que le sable ponceux blanc ou gris clair était recouvert d'une couche, épaisse de $0^m,2$, de cendre plus foncée, très fine, qui à la surface présentait de nombreuses gerçures, résultat de la dessiccation, et qui était donc évidemment arrivée là à l'état de boue humide; à ce moment, toutefois, je n'attachai pas à ce fait une importance spéciale.

Le 16, j'abordai à *Krakatau*, où je restai jusqu'au 18. Lorsque, faisant le lever de la montagne, nous fûmes parvenus, le 17, au point le plus élevé, et qu'ensuite nous commençâmes à descendre la pente abrupte du côté sud, je remarquai avec étonnement, sur les matières ponceuses ordinaires, de couleur grise, deux bandes noires, qui, naissant à l'altitude de 600 mètres, donc à environ 200 mètres en contre-bas du sommet, se poursuivaient en ligne assez droite, sur une longueur de 1300 mètres, jusqu'à 100 m. au-dessus du niveau de la mer. A l'examen, je reconnus que ces bandes noires étaient deux courants de boue, qui avaient coulé le long du versant de la montagne et qui recouvraient la ponce blanche sous une épaisseur moyenne de $0^m,2$ à $0^m,3$ et sur une largeur de 1 à 5 mètres. Le plus remarquable, toutefois, c'est que ces courants de boue ne suivaient pas seulement les croupes de la montagne, mais étaient aussi manifestement descendus dans les profonds ravins du dépôt ponceux. Ils ne peuvent donc s'être formés que lorsque le sable ponceux avait déjà été sillonné par les pluies, et comme l'érosion

de ces ravins a dû demander plusieurs semaines, l'éruption boueuse n'a pu se produire immédiatement après les éruptions du mois d'août. A l'époque de ma visite, la boue gris foncé, très fine, était encore humide et se laissait pétrir sous les doigts, ce qui prouve également qu'elle n'était arrivée que depuis peu de temps.

Cette éruption a aussi amené au jour des corps très singuliers, savoir, des petites boules parfaitement arrondies, semblables à des billes d'enfants, d'un diamètre de 1½ à 6 centimètres. Elles font une vive effervescence dans les acides et contiennent: 55°/₀ de carbonate de chaux, 26°/₀ de silice, 11°/₀ d'alumine et 5°/₀ d'eau.

Ces rognons marneux riches en calcaire doivent provenir de couches de marne existant au fond du détroit de la *Sonde*, dans le voisinage de *Krakatau*, et dont les détritus, éjaculés par le cratère, étaient animés d'un rapide mouvement de rotation. Les boules, qui sont très rares, ne se trouvent jamais *dans* le sable ponceux, mais seulement à sa *surface*, ordinairement enfoncées jusqu'à la moitié; elles appartiennent évidemmemt aux toutes dernières déjections. Je n'ai pu m'assurer si les courants de boue sont également calcarifères, l'échantillon que j'avais emporté s'étant malheureusement égaré.

La dernière éruption boueuse, — qui doit avoir été assez importante, puisque à *Calmeyer*, à 12 kilomètres de *Krakatau*, la couche supérieure noire a $0^m,2$ d'épaisseur, et que la boue a été lancée par dessus le sommet de la montagne, haut de 830 mètres, pour retomber sur un point du versant opposé, d'où elle a coulé plus bas, — cette dernière éruption n'a très probablement eu lieu que 6 jours avant mon arrivée, savoir, le 10 octobre, à environ 9 heures ½ du soir; ce soir là, en effet, vers 10 heures, il est arrivé à *Tjikawoeng*, sur la *Welkomstbaai*, une onde liquide assez forte, la seule qui ait été remarquée depuis le 28 août. Un bruit sourd, dans la direction de *Krakatau*, a été alors entendu, tant dans la localité qui vient d'être nommée qu'un peu plus au nord, à *Soemoer*. A *Tjikawoeng*, l'onde s'est avancée sur le rivage jusqu'à environ 75 mètres au-delà de

la ligne de haute mer; elle n'a toutefois pas été observée en d'autres points de la côte, parce que le littoral dévasté n'était pas encore habité et se trouvait entièrement désert pendant la nuit. L'onde en question est une nouvelle preuve que la chute de grandes quantités de matières éjaculées, autour de *Krakatau*, suffit pour produire de violents ébranlements marins dans le détroit de la *Sonde*.

L'éruption du 10 octobre paraît avoir été réellement la dernière. Toutefois, c'est à peine si on en a su quelque chose, et il se pourrait donc que des actions faibles postérieures eussent passé complètement inaperçues. Lorsque je visitai *Krakatau*, il n'y avait plus nulle part la moindre trace d'activité; le 18 octobre nous quittions l'île, et le 19 au soir nous étions au *Vlakke Hoek*, où aucun phénomène n'attira notre attention. Les grondements qui furent entendus ce soir-là à *Tangerang* et à *Mauk*, venant de l'ouest, n'auront donc probablement pas eu leur origine à *Krakatau*. Il serait toutefois très intéressant de faire une nouvelle visite à cette île, pour s'assurer s'il y est encore survenu des changements depuis le 18 octobre.

Sans doute, après l'épouvantable crise du mois d'août et l'effondrement de la plus grande partie de l'île, une violente éruption du volcan de *Krakatau* n'est pas à craindre; mais les faibles actions ultimes peuvent, elles aussi, fournir encore beaucoup de données intéressantes, comme le montrent, par exemple, les petites billes de marne.

Une grande carte de *Krakatau* paraîtra avec le Rapport détaillé; à celui-ci seront jointes également des cartes de *Calmeyer* et des parties ravagées de *Merak*, *Java's* 1[ste] *punt*, *Sebesi*, *Seboekoe*, *Teloeq Betoeng* et *Kalianda*; puis des tableaux de la pression à l'usine à gaz de *Batavia* et de la hauteur de l'eau aux marégraphes de *Tandjong-Priok* et de *Soerabaja*; une carte des cendres et d'autres documents; enfin, quelques dessins en couleur de *Krakatau* et des régions dévastées où, en peu d'instants, des milliers d'hommes ont perdu la vie, dans la journée néfaste du 27 août 1883.

BUITENZORG, 19 février 1884.

SUR LA MÉTÉORITE DE NGAWI,

TOMBÉE LE 3 OCTOBRE 1883, DANS LA PARTIE CENTRALE DE L'ILE DE JAVA;

PAR

E. H. VON BAUMHAUER.

Par lettres en date des 21 et 25 novembre 1883, M. R. D. M. Verbeek, ingénieur des mines de 1ère classe à Buitenzorg, a eu l'obligeance de m'informer que le 3 octobre 1883, entre 5 et 5½ heures du soir, il était tombé:

1°. Une météorite dans le *dessa* (village) de Gentoeng, district de Djogorogo, arrondissement de Ngawi, résidence de Madioen; cette météorite avait été cassée en trois morceaux par un indigène.

2°. Une seconde météorite, tombée vers la même heure à Kedoeng Poetri, district de Sepreh, arrondissement de Ngawi.

3°. Une grosse boule blanche, sans croûte fondue, qu'une jeune fille indigène dit avoir ramassée près du dessa de Tjoeroet, district de Manggar, sous-résidence de Demak, résidence de Semarang.

D'après les cartes des résidences de Java, la distance de Tjoeroet, où serait tombée le n°. 3, à Kedoeng Poetri, où a été ramassé le n°. 2, est d'environ 84 kilomètres, tandis que Gentoeng, où est tombé le n°. 1, se trouve à environ 7 kilomètres de Kedoeng Poetri.

M. Verbeek, qui avait vu ces pierres à Buitenzorg, doutait déjà fortement de l'origine météorique du n°. 3.

A la nouvelle que ces météorites avaient été envoyées aux Pays-Bas, pour le Musée national de Leyde, je m'adressai à S. E. le Ministre des colonies, qui voulut bien me donner com-

munication des deux missives suivantes, adressées par les résidents de Semarang et de Madioen à S. E. le Gouverneur-Général des Indes néerlandaises; en ce qui concerne les météorites elles-mêmes, le Ministre me renvoyait à M. le professeur K. Martin, directeur du Musée minéralogique et géologique de Leyde, où ces météorites avaient été déposées.

Copie n°. 7660/1.

SEMARANG, le 12 octobre 1883.

J'ai l'honneur d'informer Votre Excellence que, suivant une communication de M. le sous-résident de Demak, on a observé dans cet arrondissement, le mercedi 3 courant, à environ 5 heures du soir, un météore igné, répandant une vive lumière, et qui, apparu à l'ouest, se mouvait au ciel dans la direction de l'est. Au bout de quelques instants, le météore éclata, en produisant une forte détonation, semblable à un coup de canon, qui, d'après les avis reçus, a été entendue dans tout l'arrondissement.

Une jeune fille indigène, qui se trouvait par hasard dans une sawah (rizière) à l'est du dessa de Tjoeroet, district de Manggar, vit tomber l'aérolithe tout près d'elle. En voulant le ramasser, elle s'aperçut qu'il était fortement échauffé, brûlant. Lorsque la pierre fut refroidie, elle la ramassa et la porta au Wedono de Manggar, qui l'a envoyée au sous-résident, par l'entremise du régent.

Dans les arrondissements de Semarang, d'Ambarawa et de Grobagan, le même météore a également été observé, le 3 du mois courant, vers 5 heures ½ du soir, et on y a aussi distinctement entendu la détonation.

Qu'il me soit permis d'offrir à votre Excellence la pierre en question, et de lui proposer respectueusement de la soumettre à l'examen de M. l'ingénieur en chef, directeur du service des mines.

Le résident (signé) WEGENER.

A son Excellence le Gouverneur-Général
des Indes néerlandaises.

Pour copie conforme.

Le secrétaire du Gouvernement
(signé) GALLOIS.

Copie n°. 6048/25.

MADIOEN, le 16 octobre 1883.

En suite à ma lettre du 5 courant, n°. 5811/25, j'ai l'honneur d'informer Votre Excellence que le phénomène lumineux dont il s'y agissait a été manifestement un bolide. Quatre indigènes du dessa de Gentoeng, district de Djogorogo, arrondissement de Ngawi, ont vu une pierre tomber de l'atmosphère, l'ont ramassée et l'ont cassée en trois morceaux.

Le même jour, une seconde pierre, qui lors de sa chute s'enfonça assez profondément dans le sol, fut trouvée par un indigène de Kedoeng Poetri (district de Sepreh, arrondissement de Ngawi).

Cette dernière pierre, restée entière, a la forme d'un coin, ce qui est évidemment dû à l'état de ramollissement par la chaleur, où elle se trouvait en pénétrant dans le sol. La surface de la pierre montre distinctement les traces de l'incandescence qu'elle a subie.

J'ai fait remettre cette pierre, ainsi que les trois fragments mentionnés plus haut, au garde-magasin d'ici, avec ordre de les envoyer à son collègue de Batavia, qui les fera parvenir au Secrétaire général.

Le résident (signé) OUDEMANS.

A son Excellence le Gouverneur-Général des Indes néerlandaises.

Pour copie conforme.

Le secrétaire du Gouvernement signé (GALLOIS).

Lors d'une visite que je fis à M. le professeur Martin, le 29 janvier 1884, j'eus l'occasion de voir au Musée la pierre dont il est question dans la missive de M. le résident de Semarang. C'est une boule jaune, presque parfaitement ronde, d'un diamètre de plus de 1 décimètre, évidemment un simple caillou roulé, formé, comme le montre la cassure, d'un calcaire à foraminifères ordinaire. Une méprise, très facile à expliquer, a eu lieu dans

ce cas. La jeune fille indigène, encore sous le coup de l'effroi que lui avait causé la violente détonation et la vue d'un globe de feu tombant à peu de distance, s'est rendue à l'endroit de la chute, où elle a vu une boule ronde, de grosseur inaccoutumée pour elle, une pierre roulée qui se trouvait là par hasard. Tout naturellement elle a cru que cette pierre venait de tomber du ciel, tandis que, ignorante de l'aspect extérieur des météorites, elle n'aura pas remarqué la vraie pierre tombée, qui d'ailleurs était probablement enfoncée à une assez grande profondeur dans le sol.

Comme il ne me paraissait guère douteux qu'une météorite était tombée à l'endroit en question, j'ai, à la date du 30 janvier, appelé l'attention de S. E. le Ministre des colonies sur l'intérêt qu'il y aurait à rechercher la susdite jeune fille du dessa de Tjoeroet, à lui demander de désigner la place où elle a vu tomber le bolide, et à exécuter des fouilles en ce point et aux alentours, pour tâcher d'y découvrir une pierre noir-brunâtre à la surface, gris foncé à l'intérieur. Son Exc. a eu la bonté de me faire savoir que le désir exprimé par moi avait été communiqué au Gouverneur-Général des Indes. Il n'est donc pas impossible que la pierre perdue finisse par se retrouver [1]).

Outre cette prétendue météorite, je vis à Leyde la météorite vraie, ci-dessus mentionnée sous le n°. 2, qui avait été trouvée par l'indigène de Kedoeng Poetri et qui était restée entière. Cette pierre, pesant un peu plus de 200 grammes, était, sauf en une couple de points où de petits éclats en avaient été détachés, entièrement recouverte d'une croûte noir-brunâtre,

1) Dans le Journal le *Handelsblad* du 21 mai 1884, parmi les nouvelles des Indes, je lis ce qui suit: „Le Journal le *Locomotief* contient une information suivant laquelle le météore observé, il y a quelque temps, dans la partie centrale de Java, serait tombé près d'une parcelle de terre tenue en bail emphytéotique par M. F. Kläring, à Sumberobjong, dans le Ngawi. Celui-ci a fait déterrer la pierre, et la conserve. L'administration ne peut pas se la faire remettre à l'amiable, bien que la pierre soit tombée sur le domaine de la Compagnie". Serait-ce là la pierre perdue, dont la chute a été vue par la jeune fille?

de $\frac{1}{2}$ mm d'épaisseur; elle avait une configuration cunéiforme.

Enfin, il y avait encore une couple de petits fragments provenant de la pierre désignée sous le n°. 1; l'un d'eux avait environ la forme d'un cube ou d'une pyramide quadrangulaire tronquée, d'un diamètre d'un peu plus de 2 centimètres et dont les quatre faces latérales de la pyramide étaient encore recouvertes de la croûte noire; ce fragment pesait environ 18 grammes, tandis que l'autre, partiellement avec croûte noire, ne pesait que 4 grammes.

Comme l'ingénieur en chef, directeur du service des mines, et le directeur de l'instruction publique, des cultes et de l'industrie, aux Indes, avaient manifesté le désir que l'étude de ces météorites me fut confiée, et comme l'examen des échantillons indiquait clairement que les n°s. 1 et 2 avaient appartenu à la même masse, M. le professeur Martin me céda les deux petits fragments n°. 1, en gardant pour le Musée de Leyde la pierre intacte n°. 2. M. Martin n'ayant pas consenti à ce que celle-ci sortît temporairement du Musée, je priai M. Wendel, lithographe à Leyde, de la représenter, en grandeur naturelle, dans cinq positions différentes; ces dessins, comme tout ce qui vient des mains de cet artiste, sont supérieurement exécutés (voir la Planche V). Pour la même raison, je dus aussi prier M. le professeur H. A. Lorentz, de Leyde, de vouloir bien déterminer la densité de la pierre; il s'y est prêté de la façon la plus obligeante et m'a communiqué les résultats de son examen dans la note suivante, dont je le remercie sincèrement:

„La météorite pèse 202^{gr},1 et sa densité (relative au volume total) est de 3,11 (à 15° C). La pierre, toutefois, est très poreuse et peut absorber l'eau en quantité assez notable. L'ayant plongée dans l'eau, sous la cloche de la machine pneumatique, j'ai pu y faire pénétrer 6^{gr},4 de ce liquide; il suit de là, puisque le volume total est de 65 centimètres cubes, qu'au moins $\frac{1}{10}$ de ce volume est occupé par des cavités; peut-être même la proportion est-elle encore plus forte, car, en premier lieu, il se pourrait qu'un séjour plus prolongé sous la cloche eût occasionné le dégagement d'un peu plus d'air, et, en second lieu, la possibilité

existe que quelques-unes des cavités soient complètement fermées. Quoi qu'il en soit, en prenant pour le volume des cavités 6cc,4, on trouve, pour la densité de la matière dont la météorite est composée, 3,45; en réalité, ce nombre est une limite inférieure."

Une détermination avec le picnomètre, que j'ai exécutée moi-même, sur la faible quantité de 0gr,6 de poudre fine de la pierre, dans l'eau distillée bouillie, m'a donné pour la densité, par rapport à celle de l'eau à 15° C, le nombre 3,561.

Il est donc avéré que le 3 octobre 1883 entre 5 et 5½ heures du soir, au-dessus de la partie centrale de Java, une météorite s'est approchée de la terre, qu'elle a éclaté dans les hautes régions de l'atmosphère, et qu'une couple des éclats, après avoir traversé l'air avec une grande vitesse, avoir été amenés dans ce trajet à un état d'incandescence et de fusion superficielles et s'être ainsi entourés d'une croûte noir-brunâtre, sont tombés sur le sol et ont accidentellement été découverts par quelques personnes; en outre, il est extrêmement probable que, dans le même périmètre, beaucoup d'autres fragments sont tombés à terre sans avoir été aperçus, qu'ils se sont profondément enfoncés dans le sol et, par suite, sont irrévocablement perdus pour nous.

M. Verbeek m'a encore écrit, le 10 mars 1884, qu'une autre chute de météorites a eu lieu, dans la nuit du 17 au 18 janvier 1884, à Tjinangka, district d'Anjer, résidence de Bantam; toutefois, à la date de sa lettre, et malgré les recherches ordonnées par le Résident, M. Spaan, on n'avait pu trouver aucune de ces pierres; personne ne les avait vues tomber, par suite de l'heure à laquelle la chute s'était produite.

La météorite du 3 octobre 1883, que j'ai inscrite dans mon Catalogue sous le nom de *météorite de Ngawi*, est remarquable surtout par sa structure. Son aspect extérieur ne présente rien de particulier; tant le n°. 2 que le n°. 1 sont des fragments d'un corps plus grand, et la forme en coin du n°. 2 est sans

doute purement accidentelle et nullement attribuable à ce qu'il aurait été à un état de ramollissement en pénétrant dans le sol. Les deux fragments sont recouverts, comme presque toutes les météorites lithoïdes, d'une croûte terne brun-noirâtre, résultat d'un commencement de fusion des silicates, sous l'influence de l'énorme chaleur développée à la surface de la masse, durant sa course rapide, par la violente compression de l'air. Sur une des faces latérales on distingue des stries parallèles, dues au frottement que la météorite, probablement encore chaude à la surface, aura éprouvé, en s'enfonçant dans le sol, de la part des pierres qu'elle y rencontrait.

L'assertion de la jeune fille indigène, relativement à l'état brûlant du caillou calcaire roulé, me paraît devoir être regardée comme le produit d'une imagination terrifiée; il n'est guère admissible, en effet, que la météorite tombée en ce point ait cédé au caillou assez de chaleur pour l'échauffer fortement; ce caillou aura probablement été exposé longtemps aux rayons du soleil.

La météorite de Ngawi appartient au groupe des météorites très pauvres en fer nickelé métallique; celui-ci s'y montre seulement cà et là, sous forme de ponctuations à éclat métallique. Par contre, elle est très riche en fer sulfuré; non-seulement on y voit briller cà et là des cristaux de troïlite, mais le fer sulfuré est encore répandu d'une manière très caractéristique dans toute la masse. Il forme, en effet, l'enveloppe d'innombrables globules, très inégaux en volume et dont quelques-uns ont un diamètre de 2 à 3 mm.; la pierre entière n'est qu'une agglomération de pareils globules, comme le montre distinctement la section polie de l'échantillon n°. 2, représentée, sous un grossissement de quatre fois, dans la fig. 1, pl. VI; la remarquable structure de la masse est nettement accusée par cette figure. Les bords noirs des globules consistent en fer sulfuré, et c'est à cet élément que la pierre doit une certaine solidité, car l'intérieur des globules est tellement friable, ou réduit en poudre fine, que la taille en lamelles minces propres à l'examen microscopique a été à peu près impraticable. M. le professeur Behrens, de Delft, qui a

acquis tant d'habileté sous ce rapport, n'est arrivé à obtenir qu'une préparation assez imparfaite, dont M. Wendel a fait une reproduction lithographique au grossissement de $\frac{10}{1}$ (fig.2, pl.VI). Voici ce que M. Behrens m'a communiqué comme résultat de son examen microscopique:

„La base consiste en enstatite (et peut-être hypersthène), olivine et fer sulfuré noir; çà et là elle est pointillée de fer métallique, en petits grains parfois microscopiques et ordinairement entourés de fer sulfuré. L'olivine affecte généralement la forme de cristaux plus ou moins arrondis, limpides, contenant de rares inclusions ponctiformes de verre brun; l'enstatite, au contraire, se présente en agrégats sphéroïdaux de petits cristaux prismatiques fracturés, rarement de cristaux compactes et de secteurs flabelliformes finement fibreux. Les cristaux arrondis d'olivine et les agrégats sphéroïdaux d'enstatite sont enveloppés et agglutinés par le fer sulfuré, qui parfois pénètre aussi, sous forme de petits filaments déliés, entre les microlithes d'enstatite. Le fer sulfuré s'est manifestement solidifié le dernier, ce qui est d'accord avec son point de fusion peu élevé. La masse pierreuse est éminemment friable et donne l'impression d'un conglomérat dont les noyaux sont en partie brisés, tandis que le ciment, solidifié plus tard, présente plus de cohésion".

Dans la fig. 2 (Pl. VI) *px* signifie: pyroxène (enstatite et peut-être hyperstène); *fs*: fer sulfuré; *ol.*: olivine.

La partie centrale de la figure est un vide, dont la matière s'est perdue pendant la taille.

Sans doute, cette texture sphéroïdale se rencontre dans beaucoup de météorites lithoïdes, désignées sous le nom de chondrites; néanmoins, parmi toutes les météorites, au nombre de près de 100, que je possède dans ma collection, et qui sont tombées à des époques et dans des régions très différentes, je n'en ai pas trouvé une seule dans laquelle ce caractère, d'être entièrement composée de globules cimentés par du fer sulfuré, soit aussi fortement prononcé que dans la météorite de Ngawi.

Qu'apprend maintenant l'analyse chimique de cette météorite?

Quoique la très faible quantité de matière dont je disposais ne m'ait pas permis d'étendre les recherches autant que j'avais pu le faire jadis pour les météorites d'Utrecht, de l'Aigle, de Tjabé et de Knyahinya, mon étude a pourtant jeté le jour nécessaire sur la composition de ce remarquable aérolithe.

Je rappellerai ici un point sur lequel j'ai longuement insisté à l'occasion de l'examen de la météorite de Tjabé (*Archives néerlandaises*, t. VI, p. 305), à savoir, que l'analyse d'un petit fragment d'un agrégat de silicates, de fer sulfuré et de fer nickelé métallique ne peut donner qu'une idée très imparfaite de la composition de l'ensemble, et que, par conséquent, deux au plusieurs analyses de la même pierre doivent toujours conduire à des résultats très différents; en effet, le rapport entre le fer nickelé métallique disséminé çà et là en masses plus ou moins grandes, le fer sulfuré qui ou bien pénètre la pierre sous forme de réseau ou bien y est condensé çà et là en cristaux d'un vif éclat, enfin, les silicates qui constituent la partie essentielle de la pierre, mais qui y sont répartis d'une manière très inégale, ce rapport, dis-je, varie considérablement d'un point à l'autre. En outre, nous ne possédons encore aucun moyen suffisant de séparer les silicates solubles dans les acides des bisilicates et trisilicates moins solubles; j'en ai déjà fait la remarque antérieurement, et la difficulté m'a apparu encore beaucoup plus clairement dans le cas actuel. Lorsque la matière, réduite en poudre excessivement fine, a été traitée à plusieurs reprises et pendant beaucoup d'heures par l'acide chlorhydrique, puis, pour enlever l'acide silicique devenu libre, par le carbonate potassique bouillant, et qu'ensuite on recommence l'attaque par l'acide chlorhydrique, il se dissout de nouveau une quantité assez notable de matière, et chaque fois, dans la partie dissoute, la proportion de l'acide silicique devient plus forte par rapport à celle des bases; ce mode de séparation n'a donc qu'une valeur relative.

Comme l'aimant n'extrayait de la pierre finement pulvérisée que 2,3°/₀ de substance, dont près de la moitié en outre était

de la poudre non magnétique adhérente et du fer sulfuré, j'ai déterminé la proportion de fer nickelé en chauffant la poudre d'abord dans un courant d'hydrogène sec, et la traitant ensuite avec du bichlorure de mercure, ainsi que je l'ai décrit en rendant compte de l'examen de la météorite de Tjabé.

Le reste de l'analyse a également eu lieu de la manière indiquée à cette occasion, et la plupart des dosages ont été effectués sur trois portions différentes de poudre, de sorte que le résultat suivant est la moyenne de trois analyses:

COMPOSITION MOYENNE DE LA MÉTÉORITE DE NGAWI.

				Oxygène.	
Fer nickelé métallique	fer	2,87	3,52		
	nickel	0,65			
	cobalt	*trace*			
Fer sulfuré		5,71	5,71		
Silicate soluble dans l'acide chlorhydrique	acide silicique	19,28	52,17	10,28	10,28
	protox. de fer	15,61		3,47	9,70
	„ „ nickel	1,57		0,34	
	„ „ manganèse	*trace*			
	alumine	0,23		0,11	
	magnésie	12,42		4,97	
	chaux	1,67		0,48	
	soude	1,17		0,29	
	potasse	0,22		0,04	
Silicates inattaquables ou difficilement attaquables par l'acide chlorhydrique.	acide silicique	23,49	38,13	12,53	12,53
	protox. de fer	8,45		1,88	4,01
	alumine	0,55		0,26	
	magnésie	2,89		1,16	
	chaux	0,96		0,27	
	soude	1,56		0,40	
	potasse	0,23		0,04	
Fer chromé		0,47	0,47		
		100,00	100,00		

Le rapport de l'oxygène de l'acide silicique à celui des bases est, pour l'ensemble des silicates: 22,81 : 13,71, ou environ 3 : 2.

Il ressort de cette analyse:

1°. Que la météorite est très pauvre en fer nickelé métallique, et par contre très riche en fer sulfuré.

2°. Que le silicate le plus facilement dissous par l'acide chlorhydrique et le carbonate potassique est un monosilicate, l'*olivine*, qui contient un peu de nickel et dans lequel le rapport atomique entre le fer et le magnésium est environ de 2 : 3.

3°. Que le silicate (ou les silicates) inattaquable ou difficilement attaquable par l'acide chlorhydrique n'est pas exclusivement un bisilicate (enstatite), mais un trisilicate ou un mélange de bisilicate et de trisilicate, peut-être avec de l'acide silicique libre; à cet égard, l'analyse ne peut rien décider. La même chose d'ailleurs a été trouvée par moi pour la météorite de Tjabé et par Wöhler pour celle de Mezö-Madaras (tombée, en 1852, en Transylvanie). Dans ces deux pierres, la proportion d'acide silicique de la partie inattaquable par l'acide était beaucoup trop élevée pour un bisilicate.

RECHERCHES
SUR LES
RELATIONS QUANTITATIVES
ENTRE
L'ABSORPTION DE LA LUMIÈRE ET L'ASSIMILATION DANS LES CELLULES VÉGÉTALES,

PAR

Th. W. ENGELMANN.

I. Le photomètre microspectral, appareil pour l'analyse microspectrale quantitative.

Les expériences que j'ai faites antérieurement, à l'aide de la méthode des bactéries, sur les cellules végétales vivantes vertes, vert bleuâtre, jaunes et rouges [1]), ont montré que les rayons lumineux exercent, en général, une action assimilatrice d'autant plus énergique qu'ils sont absorbés en plus forte proportion par la chromophylle des cellules en question. Le rapport entre l'assimilation et l'absorption ne pouvait toutefois être soumis à une étude quantitative exacte, tant qu'on ne possédait pas le moyen de mesurer la valeur de l'absorption dans les objets d'une petitesse microscopique.

Les oculaires microspectraux connus jusqu'ici (Sorby-Browning, Zeiss-Abbe, etc.) permettent bien d'observer les spectres d'absorption d'objets microscopiques et de les comparer directement avec d'autres spectres, mais ils ne se prêtent pas à la mesure de la perte de lumière occasionnée par l'absorption. Tout au plus comportent-ils une estimation, dans laquelle toutefois, pour différentes raisons physiologiques sur lesquelles il est inutile d'insister ici, l'observateur, même le plus exercé et le plus attentif, reste toujours exposé à de grossières erreurs.

---

1) *Couleur et assimilation*, dans *Arch. néerl.*, t. XVIII (1883), p.29.

Ce défaut, il y est remédié par le photomètre microspectral déjà annoncé à la fin du Mémoire ci-dessus cité, et qui depuis lors m'a été livré, d'une exécution parfaite, par M. C. Zeiss, de Jéna. Ce photomètre peut être adapté directement à tout corps de microscope de dimension moyenne ou grande.

Il se compose de deux parties séparées, l'une, inférieure, qui comprend le mécanisme de la fente, le prisme de comparaison et l'appareil d'éclairage latéral, l'autre, supérieure, le spectroscope proprement dit.

Le mécanisme de la fente, dans la pièce inférieure, consiste essentiellement en deux moitiés de fente (s et s_1), dont chacune se meut, symétriquement à l'autre, au moyen d'une vis micrométrique. Le milieu de l'une des demi-fentes forme donc toujours le prolongement ininterrompu du milieu de l'autre. Sur le tambour de chacune des vis micrométriques la largeur de la fente se lit directement, en unités de $0^{mm},01$. Les millièmes de millimètre sont encore parfaitement appréciables.

A l'aide d'une loupe oculaire, l'image de l'objet microscopique coloré est projetée au milieu de la fente s (fente de l'objet), aussi exactement que possible à la limite de s_1 (la fente de comparaison). Pour la facilité du réglage précis et, en général, des petits déplacements uniformes de l'objet, celui-ci repose sur une table à laquelle un mouvement horizontal est imprimé par une vis. La table porte-objet dont je me sers est celle inscrite sous le N°. 51 dans le Catalogue de Zeiss N°. 26, 1883.

Sous la fente de comparaison peut être glissé un prisme à réflexion totale, lequel, à travers un petit tube vissé sur le côté, reçoit de la lumière d'un miroir mobile en tous sens, lumière provenant de la même source qui éclaire l'objet. Pour que l'éclairement de la fente de comparaison soit uniforme, indépendant de la position de l'œil, l'orifice intérieur du petit tube est muni d'une lentille collectrice, par laquelle une image virtuelle de l'orifice extérieur, auquel s'adaptent des diaphragmes etc., est formée dans le tube du microscope, à peu près au même point où se trouve l'ouverture de l'objectif par lequel la fente objective s reçoit sa lumière.

Lorsqu'on fait usage du prisme de comparaison, il faut examiner chaque fois, au moyen du spectroscope, si la lumière qui éclaire la fente objective, avant l'interposition de l'objet, et celle qui éclaire la fente de comparaison ont une composition exactement semblable. Comme cela n'est généralement pas le cas, même quand les deux lumières proviennent de la même source, les perturbations qui en résultent doivent être éliminées, ce qui peut avoir lieu d'une manière satisfaisante par deux méthodes fondées sur des principes différents, méthodes que je me dispenserai d'exposer ici.

Souvent on fait mieux de supprimer le prisme de comparaison, auquel cas la fente de comparaison est éclairée par la lumière qui, venant du miroir du microscope, a rasé l'objet. Il est alors encore plus facile d'éviter ou de corriger les différences de qualité et d'intensité entre l'éclairage de s et celui s_1.

Après que l'objet a été convenablement installé dans la fente s, on enlève la loupe et on pose la partie supérieure de l'appareil, le spectroscope proprement dit, sur la partie inférieure, à laquelle elle est fixée, par un mécanisme simple, dans une situation toujours identique. Les ébranlements sont évités ici d'une manière beaucoup plus parfaite que dans les oculaires spectraux en usage jusqu'à ce jour.

La partie supérieure de l'appareil contient d'abord un tube collimateur avec lentille, par lequel la lumière venant des fentes est projetée sur un système de prismes, Celui-ci envoie les rayons dispersés dans un tube d'observation incliné de 60° sur l'axe optique du microscope, à la partie supérieure duquel tube ils sont réunis, au moyen d'une lentille faible, en deux spectres réels (S et S_1). On observe ces deux spectres à travers une loupe oculaire, où ils ont alors, projetés à 250 mm de l'œil, entre les raies a et G de Fraunhofer, une longueur de 180 mm, de sorte qu'ils apparaissent sous un angle visuel à peu près quatre fois plus grand que celui des spectres dans l'oculaire spectral de Zeiss-Abbe. L'intensité lumineuse est si grande que dans beaucoup de cas, même en se servant de la lumière du gaz, on peut avantageusement avoir recours aux plus fortes lentilles à immer-

sion dans l'huile. En ce qui concerne la netteté des spectres, il suffira de remarquer que dans le spectre de la lumière solaire qui a traversé deux plaques de verre dépoli, et avec une fente large de 25μ et même moins, D se montre très distinctement et très nettement double, la plus réfrangible des deux lignes étant d'ailleurs notablement plus foncée et plus large que l'autre, environ comme dans le spectre solaire figuré par M. G. Müller dans les Publications de l'observatoire astrophysique de Potsdam, t. II, n°. 6, pl. 33. Quand on emploie la lumière solaire directe ou peu affaiblie, le nombre des raies de Fraunhofer, qui peuvent être distinguées, ne le cède que très peu à celui des raies représentées sur cette planche.

Le champ visuel peut être restreint à volonté par deux paires de plaques, qui, au moyen de vis à mouvement très doux, se laissent déplacer perpendiculairement l'une à l'autre dans le plan focal de la loupe oculaire. L'une des paires permet d'isoler un groupe quelconque de longueurs d'onde de S et S_1, pour l'observer séparément et comparer sa clarté dans les deux spectres; l'autre paire sert à exclure la lumière latérale superflue. Ce sont là deux conditions absolument nécessaires pour l'exactitude des mesures à effectuer avec notre instrument.

Les longueurs d'onde se lisent directement sur une échelle d'Angström, projetée de la manière connue dans le champ visuel. Des dispositions spéciales rendent facile de mettre l'échelle au point exact par rapport au spectre et de la faire passer rapidement de l'état d'éclairement à celui d'obscurcissement, ou vice-versa.

La détermination de l'absorption lumineuse se fait, comme dans beaucoup d'autres spectrophotomètres, en rendant égale la clarté des deux spectres, aux points qu'on veut comparer; dans notre appareil, on obtient cette égalité en changeant convenablement, au moyen de la vis micrométrique correspondante, la largeur de la fente de comparaison s_1. Lorsque la fente est éclairée uniformément, condition facile à remplir, on peut admettre, sans erreur appréciable, que les intensités lumineuses sont proportionnelles aux largeurs des fentes; des largeurs notées

on déduit donc aisement l'intensité relative $\frac{J_1}{J}$ de la lumière transmise et par suite la quantité relative de la lumière absorbée, c'est-à-dire le coefficient d'absorption $n = \frac{J - J_1}{J}$, en supposant que la perte de lumière, $J - J_1$, ne dépende que de l'absorption.

Cette dernière hypothèse, bien entendu, n'est pas rigoureusement exacte. Une partie de la lumière que le miroir projette sur l'objet est réfléchie; dans le cas actuel, celui de cellules végétales, la réflexion a lieu à la séparation de l'eau et de la membrane cellulaire, à celle de la paroi cellulaire et du protoplasma, etc. La grandeur de cette perte est différente en des points différents de la même cellule; aux bords, par exemple, elle est en général un maximum; dans chaque cas elle dépend de la forme, des dimensions, de la situation, de la structure, etc. Les difficultés qui résultent de là paraissent toutefois plus sérieuses qu'elles ne le sont en réalité. D'un côté, en effet, la perte dont il s'agit est souvent susceptible de mesure directe (on déterminera par exemple, chez la même cellule, la perte totale de lumière $J - J_1$ en des parties les unes chargées les autres dépourvues de chromophylle, mais du reste entièrement semblables, — ce qui est notamment d'une exécution très facile chez *Callithamnion*, *Spirogyra*, *Zygnema cruciatum*, *Mesocarpus*, *Sphaeroplea annularia*); d'un autre côté, par le choix heureux et la multiplication suffisante des objets et des points soumis à l'épreuve, il est possible d'éviter ou de supprimer la difficulté. Une circonstance qui est aussi à noter sous ce rapport, c'est que la perte occasionnée par la réflexion pèse généralement au même degré sur tous les genres de rayons. D'après l'ensemble de mes observations, je ne puis taxer cette perte, en moyenne, qu'à quelques centièmes de la valeur de J, de sorte qu'il ne peut en provenir aucune altération considérable des résultats.

Des difficultés d'une autre nature naissent, pour la détermination de n, tantôt des déplacements des cellules, spontanés ou provoqués par la lumière (Naviculacées, Oscillarinées), tantôt des mouvements (surtout photocinétiques) des corps chromophyl-

liens à l'intérieur des cellules. Dans le premier cas, il faut beaucoup de patience et souvent de longs tâtonnements pour le choix des objets; dans le second, on doit, avant de commencer les mesures, exposer la cellule pendant quelque temps à la même lumière où elle se trouvera lors de la détermination de *n*, afin que les corps chromophylliens aient le temps de prendre la situation et la forme qui correspondent à ce degré d'éclairement. Pour remplir cette condition, une source lumineuse constante est indispensable. Comme il importe peu, pour la mesure de *n*, de quelle nature est la source lumineuse, pourvu qu'elle fournisse un spectre continu d'une étendue et d'une clarté suffisantes, je me suis toujours servi du grand brûleur rond et double de Sugg, de Westminster (N°. N N = 50 bougies norm.), dont la lumière était au besoin concentrée par une grande lentille. La flamme du gaz était maintenue à une hauteur parfaitement constante, à l'aide d'un régulateur de pression d'Elster, de Berlin.

Toutes les observations avaient lieu dans une chambre assez fortement obscurcie. La lampe, susceptible de déplacement dans la ligne verticale, était entourée d'un cylindre de tôle noirci, pourvu supérieurement d'une cheminée et latéralement d'ouvertures qu'on pouvait masquer ou démasquer à volonté; le microscope était placé dans ma cage obscure, à laquelle, pour la circonstance, avaient encore été apportées quelques dispositions auxiliaires.

Dans ces conditions et, bien entendu, en observant les diverses règles qui s'appliquent aux expériences microspectrales et aux déterminations spectrophotométriques en général (règles au sujet desquelles M. Vierordt, dans des écrits bien connus, a déjà dit tout l'essentiel), trois mesures étaient ordinairement suffisantes, dans chaque cas, pour fournir une moyenne assez exacte. Dans le rouge extrême au-delà de *a* et dans le violet à partir de *G* environ, il n'était plus guère possible d'effectuer des mesures précises, les spectres ayant dans ces régions une intensité lumineuse trop faible.

Pour faire juger du degré d'exactitude qui peut être atteint, je communique ci-dessous les chiffres obtenus dans une de mes

expériences. Ces chiffres donnent, en centièmes de millimètre, les largeurs absolues (w_1) de la fente s_1 pour lesquelles, aux points spectraux indiqués en tête des colonnes, la clarté était la même dans les deux spectres S et S_1.

23 septembre 1883. *Bulbochaete*. Observé avec l'objectif *C* de Zeiss. Prisme de comparaison. — Largeur *n* de la fente objective *s*: 0,15 mm.

$\lambda \left(\text{en } \frac{\mu}{1000}\right) =$	680	622	589	558	522	506	486	431
	$B\frac{1}{4}C$	$C\frac{1}{2}D$	D	$D\frac{1}{2}E$	$E\frac{1}{2}b$	$E\frac{1}{2}F$	F	G
$w_1 =$	3,2	7,3	10,0	14,2	12,8	8,1	3,9	2,4
	4,0	8,0	10,4	13,6	12,3	8,3	3,4	2,2
	3,2	8,1	10,2	13,0	11,9	7,5	4,0	2,6
Moyenne	3,47	7,8	10,2	13,6	12,3	8,0	3,8	2,4

Après que la cellule eut été retirée de la fente objective, la valeur de w_1 pour laquelle l'intensité lumineuse était partout la même aux deux côtés, ($w_1{}^0$), s'élevait, comme moyenne de six expériences, à 31,4.

Les écarts de ces chiffres, par rapport à la moyenne, ne dépassent pas ceux qu'on trouve lorsque, au lieu de corps chromophylliens vivants, on prend des matières colorantes inaltérables, soit en solution, soit sous la forme solide. C'est ce que montrent les deux exemples suivants:

Bichromate de potasse en solution aqueuse à 1°/₀₀, formant une couche épaisse de 1 cm dans un récipient de verre à faces planes et parallèles. $w = 0{,}20$ mm. Prisme de comparaison.

$\lambda =$	670	589	558	540	522	486	431
	$B\frac{1}{2}C$	D	$D\frac{1}{4}E$	$D\frac{3}{4}E$	$E\frac{1}{2}b$	F	G
$w_1 =$	18,8	16,6	15,2	11,2	5,0	0	0
	18,0	17,6	15,0	10,2	4,9	0	0
	18,5	18,5	15,6	9,4	4,9	0	0
Moyenne	18,4	17,6	15,3	10,3	4,9	0	0

$w_1{}^0$ (le récipient rempli d'eau distillée) = 18,7
(moyenne de onze observations).

Lamelle hexagonale de *fer oligiste* (Fe_2O_3), incluse dans l'oligoclase de Tvedestrand en Norwège. $S = 20$. Pas de prisme de comparaison.

λ =	700	650	600	550	500	450
w_1 =	18,0	18,6	16,4	13,9	12,8	8,3
	18,6	19,0	16,0	13,7	12,2	9,8
Moyenne	18,3	18,8	16,2	13,8	12,5	9,0

$w_1{}^0 = 20$ (moyenne de quatre mesures).

Ces expériences constituent, en outre, des preuves en faveur de l'applicabilité générale de ma méthode. Dans tous les domaines de l'étude microscopique, tant ceux du monde organisé que ceux du règne inorganique, elle pourra être mise à profit, comme il est sans doute inutile de le montrer en détail. Ici, je dois me borner à faire connaître les résultats obtenus au sujet de l'absorption de la lumière dans les cellules végétales vivantes, et même je n'ai à les mentionner qu'en tant qu'ils touchent la question indiquée au début de ce Mémoire.

II. Bases expérimentales pour la détermination des rapports quantitatifs entre l'énergie assimilatrice et la grandeur de l'absorption.

La détermination de ces rapports exigeait, en premier lieu, que la valeur de n fût mesurée, chez le plus grand nombre possible de cellules diversement colorées, en un nombre suffisant de points du spectre, et cela aux mêmes points et chez les mêmes espèces de cellules pour lesquels avait été déterminée aussi la valeur de A, par la méthode des bactéries.

A première vue, il pourrait paraître plus simple et plus court de mesurer A et n chez des individus cellulaires en nombre moindre, mais toujours chez les mêmes. En réalité, toutefois, cette voie offre plus de difficultés, pour les raisons suivantes. Pour la détermination exacte de A par la méthode de l'observation successive [1]), il faut en général utiliser une partie beau-

[1]) *Ueber Sauerstoffausscheidung von Pflanzenzellen im Mikrospectrum*, dans *Bot. Zt.*, 1882, N°. 26.

coup plus grande du contenu coloré de la cellule (sinon la cellule entière, ou même plusieurs cellules, comme chez les Oscillarinées) que pour la détermination exacte de *n*. Dans le premier cas, on obtient les valeurs moyennes du dégagement d'O de toutes les particules chromatophores frappées par la lumière; dans le second, seulement les valeurs moyennes de *n* pour un nombre relativement restreint de ces particules. Or ces dernières valeurs doivent, pour des raisons données dans la section I, être trouvées très différentes, suivant le point de la cellule qu'on a placé dans la fente objective. Pour neutraliser les erreurs qui en résultent, on serait donc en général obligé de déterminer les valeurs de *n*, chez une seule et même cellule, en des points très divers. Or cela a ses difficultés, parce que, dans le temps très long que ces mesures demandent, et sous l'influence d'un éclairage continu très énergique et d'autres conditions plus ou moins anormales, les cellules peuvent aisément subir des modifications profondes: accumulation d'amidon, changements de la couleur et de la transparence par suite de dépérissement, etc. En outre, l'observateur, astreint pendant plusieurs heures, sans interruption, à des comparaisons photométriques, est fortement exposé à se fatiguer trop tôt.

Aussi, bien que j'aie exécuté une série de déterminations parallèles de *A* et *n* sur la même cellule (entre autres chez *Mesocarpus*, *Bulbochaete*, *Vaucheria*, *Closterium*, *Euglena*) et que les résultats aient été en somme assez satisfaisants, j'ai préféré, en règle générale, mesurer *A* et *n* indépendamment l'un de l'autre, mais chez des individus aussi nombreux que possible, et en même temps aussi semblables que possible, des mêmes espèces. En multipliant suffisamment les objets et les mesures particulières, je devais obtenir des valeurs moyennes comparables.

En ce qui concerne *A*, je disposais déjà d'un assez grand nombre de mesures antérieures [1]), auxquelles, depuis lors, sont venues s'en ajouter beaucoup d'autres. Malheureusement,

[1]) *Couleur et assimilation*, dans *Archiv. néerl.*, t. XVIII, p. 29.

un ciel parfaitement serein étant très rare en Hollande, la plupart des déterminations de A ont dû être exécutées, maintenant aussi, à la lumière du gaz; pour les cellules rouges (*Callithamnion*, etc.), les mesures directes à la lumière solaire me font même encore complètement défaut. Néanmoins, les expériences faites avec l'une et l'autre espèce de lumière me paraissent suffisamment nombreuses pour fournir une base solide.

Les valeurs de n ont été mesurées, dans le courant de l'été et de l'automne derniers, chez *Cladophora*, *Bulbochaete*, *Oedogonium*, *Spirogyra*, *Mesocarpus*, *Vaucheria*, *Closterium*, *Euglena* — *Melosira*, *Navicula*, *Pinnularia*, *Gomphonema* — *Callithamnion* et *Ceramium* — *Oscillaria*.

Le choix des points du spectre aurait, en partie, pu être meilleur. On aurait surtout dû éviter, pour la détermination de A, les points où n varie très rapidement avec la longueur d'onde. Mais, pour cela, il eût fallu connaître déjà exactement n, ce qui n'était pas le cas.

Dans ce qui suit, j'ai réduit toutes les valeurs de A au spectre normal de la lumière solaire. Cela était rendu possible par la circonstance que le rapport γ, entre l'énergie assimilatrice relative de la lumière solaire (A^s) et celle de la flamme du brûleur de Sugg employé dans toutes mes expériences au gaz (A^g), se laissait calculer à l'aide des résultats fournis par la méthode des bactéries [1]). J'ai trouvé pour $\gamma = \frac{A^g}{A^s}$, comme moyennes de toutes les expériences exécutées jusqu'en novembre 1883, les valeurs suivantes (γ en $B\frac{1}{4}C$ [2]), c.-à-d. $\lambda = 680$, étant pris pour unité):

pour $\lambda =$	718	680	622	589	522	468	431
	(a)	($B\frac{1}{4}C$)	($C\frac{1}{2}D$)	(D)	(Eb)	(E)	(G)
$\gamma =$ env.	1,400	1,000	0,784	0,651	0,411	0,254	0,125

1) *Ibid.*, p.37.

2) Dans mes publications antérieures, j'ai ordinairement noté pour ce point $B\frac{1}{2}C$. Cela n'est toutefois pas complètement exact, en ce sens que j'avais toujours en vue le milieu de la bande d'absorption I chez des cellules *vivantes*, milieu qui correspond environ à $\lambda = 680$, donc, approximativement, a $B\frac{1}{4}C$.

(La valeur en $E\frac{1}{2}b$ est probablement trop forte de 2—3 pour cent.)

Les tableaux I—IV, auxquels correspondent les représentations graphiques des fig. 1—4 de la Pl. VII, contiennent les valeurs moyennes calculées pour *A* et *n*, d'après toutes les expériences que j'ai exécutées sur des cellules vertes, brunes, vert-bleuâtre et rouges, sans corrections d'aucune espèce. J'ai seulement, dans le tableau I et dans la figure 1 correspondante, exclu les expériences relatives au *Mesocarpus*, parce que, chez ces cellules, la plaque chlorophyllienne était, presque sans exception, tellement recouverte des globules fortement réfringents bien connus, et la lumière était par suite tellement affaiblie par la réflexion, qu'une détermination exacte de *n* paraissait à peu près impossible [1]. (Voir les Tableaux I—IV p. 197.)

Dans les fig. 1—4, construites d'après les tableaux ci-dessus, les valeurs de *A* sont reliées entre elles par des traits forts, les valeurs de *n* par des traits plus déliés. Naturellement, les ordonnées ne représentent pas partout les valeurs vraies de *A* et *n*, mais seulement aux points où des mesures ont eu lieu. En réalité, la forme des courbes est encore plus compliquée, de petits relèvements et abaissements se surajoutant aux lignes droites du tracé des figures. Mais, pour le but que nous nous proposons, il n'est évidemment pas nécessaire de connaître exactement, dans tous ses détails, l'allure des courbes. Il suffit de mesurer *A* et *n* en un nombre modéré de points autant que possible caractéristiques du spectre, pour avoir un point de départ assuré pour la détermination des rapports quantitatifs entre ces deux grandeurs. Aussi, parmi les conséquences variées qui ressortent de nos tableaux et de nos figures, je signalerai seulement celles qui ont de l'importance pour cet objet essentiel de notre étude.

Nous y voyons donc tout d'abord, comme il était à prévoir, que pour la chromophylle verte, brune, vert-bleuâtre et rouge *n* est chaque fois une fonction différente de la longueur d'onde. Mais, en y regardant de plus près, on constate en même temps

---

1) En *F* toutes les cellules de *Mesocarpus* donnèrent pour *A* des valeurs très élevées, ordinairement plus élevées qu'en $B\frac{1}{2}C$.

TABLEAU I. CELLULES VERTES.

λ	A^S	Nombre des Objets	Nombre des Mesures	n	Nombre des Objets	Nombre des Mesures
718	12,2	30	84	23,7	28	99
680	100,0	92	256	81,2	32	122
622	80,8	26	57	52,6	19	69
589	60,5	58	183	47,5	28	94
558	47,4	24	62	40,2	25	77
522	39,3	62	160	51,0	28	91
506	59,7	15	28	63,2	13	38
486	66,1	51	106	83,4	32	117
468	59,3	14	23	86,3	16	56
431	45,9	9	13	90,7	22	59

TABLEAU II. CELLULES BRUN-JAUNÂTRE.

λ	A^S	Nombre des Objets	Nombre des Mesures	n	Nombre des Objets	Nombre des Mesures
718	12,3	19	60	15,8	17	49
680	100,0	89	380	63,1	18	51
622	81,5	28	106	31,0	15	41
589	73,0	60	224	30,6	18	46
558	92,5	30	141	40,4	17	46
522	94,9	43	132	55,3	18	47
486	79,3	42	142	67,4	17	41
468	69,8	3	15	67,0	9	26
431	57,0	5	15	81,5	10	30

TABLEAU III. CELLULES VERT-BLEUÂTRE.

λ	A^S	Nombre des Objets	Nombre des Mesures	n	Nombre des Objets	Nombre des Mesures
718	12,0	6	17	25,0	3	12
680	80,7	30	142	52,3	5	19
622	100,0	11	37	55,9	5	18
589	92,3	26	131	51,1	4	13
558	52,4	8	21	41,3	4	13
522	46,9	20	73	40,0	4	13
486	37,4	12	26	49.4	4	12
431	—	—	—	59,8	4	12

TABLEAU IV. CELLULES ROUGES.

λ	A^S	Nombre des Objets	Nombre des Mesures	n	Nombre des Objets	Nombre des Mesures
718	2,3	3	10	12,7	5	15
680	23,9	23	93	48,1	5	18
622	29,1	10	36	—	—	—
589	58,2	14	50	44,6	5	17
572	100,0	15	61	73,0	5	19
522	68,9	11	35	68,1	5	17
486	42,8	11	36	64.2	5	15
431	18,2	4	6	81,5	4	10

une concordance très remarquable entre les quatre cas, à savoir, quant aux points suivants:

Le minimum absolu de l'absorption se trouve dans le rouge extrême [1]).

Entre *B* et *E*, tout au plus *F*, il y a un ou plusieurs maxima et minima.

Au-delà, *n* croît d'une manière continue, pour atteindre dans la partie la plus réfrangible du spectre ses valeurs absolues les plus élevées.

Comparé à *A*, *n* varie toujours, depuis le rouge extrême jusque dans le vert, dans le même sens que *A*.

Dans la partie plus réfrangible, les valeurs de *A* s'abaissent, en dépit de l'augmentation continue de l'absorption.

Il existe donc entre *A* et *n*, non pas, il est vrai, une proportionnalité directe, mais pourtant une relation manifestement assez simple et constante. Je pensai que la forme de cette relation se laisserait peut-être découvrir si l'on tenait compte de l'inégalité que présente, d'après toutes les recherches faites jusqu'ici, la distribution de l'énergie actuelle dans le spectre. Il est évident, en effet, que *A* doit dépendre de l'énergie relative de la lumière au point correspondant du spectre, et doit même, dans certaines limites et conditions, être proportionnel à cette énergie. La disproportionnalité la plus frappante entre *A* et *n*, l'abaissement de *A* au côté de l'extrémité violette, en dépit de l'accroissement notable de *n*, semblait pouvoir s'expliquer par l'abaissement assez rapide que subit ici, d'après tout ce qu'on sait, l'énergie de la lumière solaire. Un examen plus approfondi,

---

[1]) Il est à présumer, d'après cela, que les rayons calorifiques invisibles situés au-delà de l'extrémité rouge sont transmis presque sans affaiblissement par toutes les chromophylles, point qui doit avoir de l'importance pour l'économie calorifique des plantes, mais sur lequel nous ne pouvons nous arrêter ici. Le problème est des plus complexes, contrairement à ce qui semblerait résulter de la plupart des travaux qu'on possède jusqu'ici sur ce sujet.

dont le principe avait déjà été indiqué à la fin de mon Mémoire antérieur [1]), a conduit à la solution suivante de la question, et cela en faisant découvrir une nouvelle méthode pour déterminer la distribution de l'énergie dans le spectre.

III. Détermination de la distribution de l'énergie dans le spectre, au moyen de la méthode des bactéries et de l'analyse microspectrale quantitative.

L'énergie absolue, nécessaire pour dégager une quantité d'oxygène telle que la réaction bactérienne caractéristique se produise, est, dans toute série d'expériences convenablement exécutée, une constante (c) indépendante de la longueur d'onde. La preuve en est fournie par le fait que, pendant la durée d'une pareille série expérimentale, la largeur de fente exigée pour la réaction reste constante pour tout point quelconque du spectre [2]). Cette largeur de fente étant désignée par a, on a donc

$$c = a\,E \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

où E représente, dans chaque cas, l'énergie actuelle de la lumière au point du spectre qui correspond à a.

Si l'on suppose maintenant que, dans mes expériences microspectrales par la méthode des bactéries, la portion absorbée n de l'énergie E' de la lumière tombant sur la cellule a été dépensée exclusivement [3]) au travail assimilateur, $n\,E'$ est également pour chaque série d'expériences une constante indépendante de la longueur d'onde:

$$c' = n\,E' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (2)$$

---

[1]) *Couleur et assimilation*, *l. c.*

[2]) Voir, entre autres, l'exemple (*Melosira*) communiqué dans *Couleur et assimilation*, p. 39, note II.

[3]) — ou pour une fraction constante. Cette dernière hypothèse est toutefois extrêmement improbable, à raison des nombreuses différences que les chromophylles assimilatrices diversement colorées présentent dans leur manière de se comporter vis-à-vis de lumières à vibrations inégalement rapides

En multipliant (1) et (2), on obtient

$$E E' = \frac{c c'}{a n},$$

équation qui peut être remplacée, — puisqu'il ne s'agit que de valeurs relatives, non de valeurs absolues, — par

$$E^2 = \frac{1}{a n}.$$

Mais, d'après la définition donnée antérieurement 1), on a $\frac{1}{a} = A$, d'où il suit

$$E = \frac{\sqrt{A}}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

A l'aide de cette formule on peut calculer E en fonction de λ. Si l'on trouve alors que les valeurs de A et n données par les chromophylles à coloration différente conduisent toutes à la même forme de fonction, il en résultera, puisque les valeurs de chaque couple de séries d'expériences sont entièrement indépendantes de celles obtenues pour les autres chromophylles, une preuve tout à fait objective de l'exactitude de la relation trouvée $E = f(\lambda)$ et par conséquent aussi de l'exactitude de l'hypothèse faite ci-dessus, concernant le rapport entre l'absorption, l'action assimilatrice et l'énergie de la lumière.

Ce calcul, exécuté sur les valeurs moyennes de A et de n consignées dans les tableaux I—IV, donne les valeurs suivantes pour l'énergie relative de la lumière solaire:

TABLEAU V.

E, moyenne des expériences en λ =	a 718	$B\frac{1}{4}C$ 680	$C\frac{1}{2}D$ 622	D 589	$E\frac{1}{2}b$ 522	F 468	G 431
sur les cellules vertes = ...	57,8	89,5	100	91,9	70,8	71,8	57,4
" " " brunes = ...	54,4	77,8	100	95,3	80,4	66,9	41,0
" " " vert-bleuâtre = ...	51,6	92,4	99,5	100	82,7	64,7	67,1

1) *Ueber Sauerstoffausscheidung von Pflanzenzellen im Mikrospectrum*, *Botan. Zeitung*, 1882, N°. 26.

En jetant un coup d'œil sur la construction graphique de ce tableau, fig. 5, on voit qu'effectivement les expériences faites sur les cellules vertes, brunes et bleues conduisent toutes à peu près à la même courbe pour la distribution de l'énergie dans le spectre solaire. Les expériences encore peu nombreuses et sous maint rapport imparfaites sur les cellules rouges donnent aussi, en gros, la même courbe; ici également, l'énergie atteint son maximum tout près de D et, à partir de ce point, décroît d'une manière continue vers les deux côtés, d'abord lentement, puis avec plus de rapidité.

On constatera avec satisfaction que cette marche est essentiellement la même que celle qui résulte des expériences exécutées avec la pile thermo-électrique par M. Lamansky sous la direction de M. Helmholtz, et aussi des mesures bolométriques, plus récentes et, à ce qu'il paraît, non moins dignes de confiance, de M. Langley.

Une concordance parfaite ne pouvait évidemment pas être attendue. Néanmoins, les écarts entre les valeurs trouvées par notre méthode physiologique et celles obtenues par des voies purement physiques ne sont guère plus grands que les différences existant entre ces dernières valeurs elles-mêmes.

Le seul écart un peu prononcé se montre dans le rouge extrême, où la méthode des bactéries donne pour E des valeurs notablement moindres. Mais ici, à cause de la faible intensité lumineuse et du rapide accroissement de A et de n entre les raies de Fraunhofer a et B, la mesure exacte de A et de n est si difficile que l'accord relativement très grand des trois nombres inscrits sous a dans le tableau V me paraît, vu le nombre assez restreint des déterminations sur lesquelles ils reposent, devoir être regardé comme un effet du hasard. Au reste, ces valeurs en a se relèvent un peu lorsqu'on tient compte de la perte que la lumière subit au contact de la cellule, par la réflexion, etc.

Pour faciliter la comparaison des valeurs trouvées par les différentes voies, je les réunis dans le tableau VI (et, en partie, graphiquement dans la fig. 6).

Lm désigne les valeurs obtenues par M. Lamansky [1]) dans le spectre solaire d'un prisme de flint, après réduction, par M. Lundquist [2]), au spectre solaire normal.

Ln indique les valeurs déterminées par M. Langley, à l'aide de la „balance actinique", dans le spectre de diffraction du soleil; les valeurs *Ln* I (fig. 6 *Ln*) sont empruntées au tableau inséré, en 1881, dans les *Ann. de chimie et de physique* (5) XXV, p. 215; les valeurs *Ln* II sont déduites de la courbe HH, que l'auteur a donnée dans son appendice à l'ouvrage de C. A. Young, *The sun*, London, 1882, p. 307, fig. 82.

En I donne les moyennes des valeurs déduites de mes expériences sur les cellules vertes, brunes et vert-bleuâtre, valeurs résumées en majeure partie dans le tableau V (et dans la fig. 5).

En II (Fig. 6, *En*) donne les moyennes de *toutes* les déterminations de *A* et *n* que j'ai faites jusqu'ici (commencement de novembre 1883), y compris, par conséquent, les mesures chez les cellules rouges et chez *Mesocarpus*.

TABLEAU VI.

Distribution de l'énergie dans le spectre normal de la lumière solaire.

λ =		680	622	600	589	593	558	522	486	431
Lm		88,0	99,0	**100,0**	99,5	98	96,5	90,0	77,0	66,0
Ln	I	89,5	96,5	98,0	99,5	**100,0**	96,0	89,0	78,0	48,0
	II	86,0	98,5	**100,0**	99,0	98,5	97,5	92,0	73,0	47.5
En	I	86,5	**100,0**	97,5	96,0	93,0	90,5	78,0	68,0	55,5
	II	83,0	97,5	99,5	**100,0**	97,5	95.0	84,0	75,0	54,0

Tout comme pour le spectre solaire, la distribution de l'énergie se laissa calculer aussi pour le spectre de la flamme du brûleur de Sugg employé dans mes expériences. Les résultats de ce calcul s'accordaient de nouveau très bien avec ceux obtenus par les voies purement physiques, bien que, — déjà à raison de la différence notable des spectres de la flamme du gaz étudiés par

1) S. Lamansky, *Untersuchungen über das Wärmespectrum des Sonnen- und Kalklichtes*, dans Pogg. *Ann.*, CXLVI, 1872, Pl. V, fig. 2.

2) G. Lundquist, *Ueber die Wärmevertheilung im Normalspectrum*, dans Pogg. *Ann.* CLV, 1875, p. 153.

les différents observateurs — l'accord fût un peu moindre que pour la lumière solaire.

Au reste, je suis loin de recommander ma méthode comme un moyen commode pour déterminer la distribution de l'énergie dans les spectres. Par suite de la complexité plus grande des conditions, d'où résulte nécessairement une plus grande variété de sources d'erreurs, et surtout à cause de la technique spéciale de l'investigation bactérienne, laquelle suppose une certaine habitude de l'expérimentation microbiologique, cette méthode doit céder le pas aux méthodes physiques usitées pour le même objet.

Même le grand avantage qu'en principe elle possède sur celles ci, à savoir, de fournir par l'accord des résultats obtenus sur des cellules de couleurs différentes une preuve tout à fait objective de son exactitude, cet avantage ne doit pas être regardé comme lui étant exclusivement propre. On aura déjà remarqué, en effet, qu'elle ne constitue qu'un cas particulier d'une méthode générale (d'ailleurs mentionnée nulle part, à ma connaissance) qui, pour atteindre son but, peut se passer de l'intervention des bactéries. Les objets diversement colorés sur lesquels sont exécutées les mesures nécessaires pour la détermination de E d'après l'équation $E = \sqrt{\frac{A}{n}}$, n'ont nullement besoin d'être des cellules vivantes, ni même des corps organiques. Il suffit qu'ils soient de couleur aussi variée que possible, qu'ils se prêtent à la détermination de la valeur de l'absorption, et que, sous l'influence de la lumière, ils subissent un changement mesurable (échauffement, etc.) proportionnel à la quantité de l'énergie absorbée. Ces conditions peuvent être remplies de bien des manières différentes, et ce serait une œuvre utile que de chercher laquelle de ces manières est la plus sûre et la plus commode.

IV. Résultats concernant les relations quantitatives entre l'absorption de la lumière et l'assimilation.

L'accord qui vient d'être constaté entre les résultats obtenus

au sujet de la distribution de l'énergie dans le spectre prouve l'exactitude de l'équation $E = \sqrt{\frac{A}{n}}$, que nous avons établie pour le calcul de cette distribution; par suite, il confirme aussi, en général, l'hypothèse sur laquelle cette équation repose, à savoir que, dans l'emploi de la méthode des bactéries, l'énergie de la lumière absorbée ne sert, tout entière, qu'à l'accomplissement du travail assimilateur.

La relation quantitative cherchée entre l'absorption et l'assimilation, c'est-à-dire, le rapport de la quantité d'énergie lumineuse disparue comme telle (E_{abs}) à l'énergie chimique potentielle produite (E_{ass}), est donc, dans ces conditions, pour toutes les longueurs d'onde et pour toutes les chromophylles, le même et, en outre, le plus simple possible, savoir

$$E_{abs} = E_{ass}.$$

La longueur d'onde et les propriétés optiques des particules plasmatiques assimilatrices n'ont d'importance qu'en ce sens, qu'elles contribuent pour une part essentielle à déterminer la grandeur de l'absorption [1]). C'est là, toutefois, une question conduisant à un domaine encore inexploré et obscur, et sur laquelle je n'insiste donc pas.

Notre équation, expression générale de la relation quantitative la plus fondamentale entre la lumière et l'assimilation du carbone, mériterait, à plusieurs titres, un examen approfondi. Mais, sous ce rapport aussi, je dois me borner à de simples indications.

D'abord, pour prévenir tout malentendu, disons encore une fois, expressément, que l'équation $E_{abs} = E_{ass}$ ne peut trouver une confirmation pratique que dans des conditions expérimentales bien déterminées, et que, même alors, elle ne se vérifie pas d'une

1) J'appelle l'attention sur ce point, parce que M. J. Reinke (*Berichte d. d. bot. Ges.*, I, p. 414) veut faire dépendre la quantité du travail assimilateur, non-seulement de l'absorption et de l'énergie des rayons lumineux, mais aussi directement du nombre des vibrations (ou de la longueur d'onde) de ces rayons.

manière absolue (pas plus qu'aucune autre des lois naturelles), mais seulement d'une manière approchée; il est vrai que, au témoignage de nos expériences, cette approximation peut ne pas différer beaucoup de l'accord absolu.

Les conditions en question sont surtout les suivantes. L'absorption de lumière ne doit se produire que dans les particules chromophyllifères assimilatrices. Les objets doivent se trouver dans un liquide approprié, dont la température ne s'éloigne pas trop de celle à laquelle a lieu ordinairement la végétation des cellules. Toutes les particules de chromophylle, aptes à l'assimilation et exposées à la lumière, doivent disposer constamment de quantités suffisantes de CO_2, c'est-à-dire, de quantités au moins aussi grandes que celles qu'elles peuvent décomposer dans les circonstances données. L'éclairage, enfin, ne doit être ni assez intense pour que les limites du pouvoir assimilateur des corps chromophylliens soient dépassées, ni assez faible pour qu'il n'émerge plus une portion notable de la lumière incidente de chaque longueur d'onde.

Toutes ces conditions sont suffisamment remplies dans la méthode des bactéries. Moins elles sont satisfaites, plus le rapport entre la grandeur de l'absorption et celle de l'assimilation change et en même temps se complique, à tel point que bientôt la question d'une relation quantitative générale — c'est-à-dire applicable à tous les cas — entre la lumière, l'absorption et l'assimilation, n'a plus aucun sens.

Or tel est, plus ou moins, le défaut de toutes les recherches faites jusqu'à ce jour (sur des objets macroscopiques). Leurs résultats ne valent chaque fois que pour les conditions spéciales et compliquées dans lesquelles ils ont été obtenus. Ils ont besoin d'être expliqués eux-mêmes au moyen de ces conditions et des relations élémentaires exprimées dans nos équations. Cela n'empêche pas, bien entendu, que ce qui leur manque en valeur théorique, ils peuvent le regagner en importance pratique immédiate.

Il est au plus haut degré remarquable que, d'après l'équation $E_{abs} = E_{ass}$, l'utilisation de la lumière au profit de la fonction

la plus importante — la néogenèse de substance organique — est, dans tous les cas, la plus parfaite qui soit possible dans les circonstances données. A priori, cela n'était nullement forcé. Une partie de l'énergie absorbée par la chromophylle vivante pouvait, en effet, être changée en d'autres formes de travail, par exemple en chaleur, comme on le voit dans les solutions de chlorophylle morte, etc.

Il y a là manifestement une adaptation des plus avantageuses, en premier lieu pour la plante et indirectement pour toute la nature vivante, — circonstance qui, en tout état de cause, ne peut que plaider en faveur de l'exactitude de notre loi.

Dans celle-ci, finalement, la loi de la conservation de l'énergie trouve aussi une confirmation, dont sans doute elle n'a plus besoin aujourd'hui, comme c'était encore le cas il y a trente ans [1]), mais qui n'en sera pas moins la bienvenue, car il s'agit d'un des points les plus merveilleux de la trame des phénomènes terrestres, celui où l'organique naît de l'inorganique.

Pour l'exposition et la démonstration plus complètes des faits et des vues consignés dans le présent Mémoire, ainsi que dans mes communications antérieures sur la méthode des bactéries et l'assimilation [2]), je dois renvoyer à un travail d'ensemble, qui sera publié plus tard.

---

[1]) Voir Helmholtz, *Ueber die Erhaltung der Kraft*, Berlin, 1847, p. 69 (ou *Wiss. Abhandlungen*, p. 66). *Ueber die Wechselwirkung der Naturkräfte* u.s.w., Königsberg, 1854, p. 37.

[2]) *Bot. Ztg.* 1881, n°. 28. — 1882, nos 20 et 21, 26, 39. — 1883, nos 1 et 2. — Pflüger's *Archiv. f. Physiol.*, t. XXIX, 1882; t. XXX et XXXII, 1883, *Arch. néerl.* t. XVII. 1882, p. 417; t. XVIII, 1883, p. 29, p. 280.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

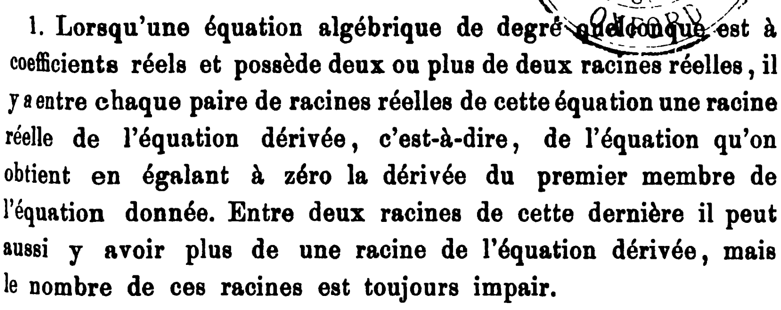
DES

Sciences exactes et naturelles.

EXTENSION DU THÉORÈME DE ROLLE,

PAR

F. DE BOER.



1. Lorsqu'une équation algébrique de degré quelconque est à coefficients réels et possède deux ou plus de deux racines réelles, il y a entre chaque paire de racines réelles de cette équation une racine réelle de l'équation dérivée, c'est-à-dire, de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée du premier membre de l'équation donnée. Entre deux racines de cette dernière il peut aussi y avoir plus de une racine de l'équation dérivée, mais le nombre de ces racines est toujours impair.

Cette vérité relativement très simple, connue sous le nom de théorème de Rolle, se laisse démontrer facilement, par exemple de la manière suivante.

Soit

$$f(x) = 0$$

une équation en x du degré n; si x_1 et x_2 représentent deux racines de cette équation, entre lesquelles il n'en existe pas d'autres, on a $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Comme $f(x)$ ne peut devenir ni infini ni discontinu, cette quantité doit être maximum pour au moins *une* valeur de x située entre x_1 et x_2. S'il y a plus de un maximum ou minimum, leur nombre total doit être impair, puisque $f(x)$, tant que x tombe entre x_1 et x_2, conserve le même signe. Or, tout maximum et tout minimum de $f(x)$

correspond à une racine de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

de sorte que le théorème en question se trouve démontré. Peut-être pourrait-on hésiter quant à son applicabilité au cas où deux ou plusieurs racines de l'équation dérivée coïncident; mais, en remarquant que, pour de pareilles valeurs de x, $f(x)$ est ou n'est pas maximum ou minimum, suivant que le nombre des racines égales est impair ou pair, on voit que le théorème subsiste encore dans ce cas, pourvu que p racines égales de l'équation dérivée soient aussi comptées pour ce nombre p.

2. Si maintenant, au lieu de considérer seulement les racines réelles de l'équation, on tient compte aussi des racines imaginaires, et qu'on n'exclue pas non plus les équations à coefficients imaginaires, la question suivante se pose: Existe-t-il peut-être un théorème plus général, une propriété reliant *toutes* les racines de l'équation de degré quelconque aux racines de l'équation dérivée, et dont le théorème de Rolle ne serait qu'un cas particulier? A première vue, on n'est guère tenté de l'admettre. Car, si l'ensemble des racines d'une équation de degré quelconque et de sa dérivée est représenté sur un plan de la manière connue, savoir, en regardant leurs parties réelles et imaginaires comme les coordonnées de points, un pareil théorème devrait exprimer la situation de $n-1$ points relativement à n autres points, entre lesquels on peut bien dans des cas particuliers, mais non en général, discerner un ordre de succession déterminé.

Pourtant, la suite de notre travail fera voir que ce théorème plus général existe bien dûment; mais aussi, elle montrera que quelque chose de semblable à un ordre de succession se remarque bien dûment dans les racines de l'équation. La circonstance que ce dernier point devait à priori sembler très improbable explique peut-être comment une propriété, aussi simple que celle dont nous aurons à nous occuper, est restée, paraît-il, inaperçue jusqu'ici.

3. Soit

$$f(z) = f(x + iy) = X + iY = R\,e^{i\Phi} = 0 \quad .\;.\;.\;. \quad (1)$$

une équation quelconque du degré n; provisoirement, nous admettrons que ni cette équation, ni sa dérivée

$$f'(z) = 0 \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (2)$$

n'ont des racines égales.

Supposons que les valeurs de z soient représentées sur un plan par le moyen ordinaire, c'est-à-dire, en considérant x et y comme les coordonnées rectangulaires d'un point mobile; les quatre fonctions de x et y définies par l'équation (1), savoir X, Y, R et Φ, auront alors en chaque point du plan une valeur, mais une seule, pourvu que nous convenions encore que Φ sera toujours prise entre 0 et 2π, la valeur 2π étant exclue, mais non la valeur 0.

4. Nous allons rechercher les propriétés des lignes

$$R = \alpha, \quad \Phi = \beta, \quad X = \gamma, \quad Y = \delta,$$

où α, β, γ et δ sont des constantes, qui peuvent être regardées comme des paramètres variables. Les valeurs que α est susceptible de prendre sont renfermées entre 0 et ∞, celles de β sont comprises entre 0 et 2π, celles de γ et de δ entre $-\infty$ et $+\infty$. Pour abréger, nous désignerons ces lignes sous les noms de lignes R, Φ, X et Y. Les lignes R sont du $2n^e$ degré, les lignes Φ, Y et Y du degré n.

5. L'équation

$$f(z) = f(x + iy) = X + iY,$$

différentiée par rapport à x et y, donne:

$$f'(z) = \frac{dX}{dx} + i\frac{dY}{dx}, \qquad if'(z) = \frac{dX}{dy} + i\frac{dY}{dy};$$

donc

$$i\frac{dX}{dx} - \frac{dY}{dx} = \frac{dX}{dy} + i\frac{dY}{dy},$$

ou

$$\frac{dX}{dx}=\frac{dY}{dy},\quad \frac{dX}{dy}=-\frac{dY}{dx}\quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Ces équations étant à leur tour différentiées par rapport à x et y, on trouve,

$$\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{d^2Y}{dxdy}=-\frac{d^2X}{dy^2},\quad \frac{d^2Y}{dx^2}=-\frac{d^2X}{dxdy}=-\frac{d^2Y}{dy^2}\ldots (4)$$

En différentiant de nouveau, on obtient:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^3X}{dx^3}&=\frac{d^3Y}{dx^2dy}=-\frac{d^3X}{dxdy^2}=-\frac{d^3Y}{dy^3},\\ \frac{d^3Y}{dx^3}&=-\frac{d^3Y}{dx^2dy}=-\frac{d^3Y}{dxdy^2}=\frac{d^3X}{dy^3},\end{aligned}\right\}\quad \ldots (5)$$

et ainsi de suite.

En outre, puisque

$$R^2=X^2+Y^2,\quad \Phi=arctg\,\frac{Y}{X},$$

on a

$$\frac{dR}{dx}=\frac{X\frac{dX}{dx}+Y\frac{dY}{dx}}{R},\quad \frac{dR}{dy}=\frac{X\frac{dX}{dy}+Y\frac{dY}{dy}}{R},$$

$$\frac{d\Phi}{dx}=\frac{X\frac{dY}{dx}-Y\frac{dX}{dx}}{R^2},\quad \frac{d\Phi}{dy}=\frac{X\frac{dY}{dy}-Y\frac{dX}{dy}}{R^2},$$

d'où, à l'aide de ce qui précède, on déduit aisement:

$$\frac{dR}{dx}=R\frac{d\Phi}{dy},\quad \frac{dR}{dy}=-R\frac{d\Phi}{dx}\quad \ldots\ldots (6)$$

De ces équations il suit, par différentation:

$$\frac{d^2R}{dx^2}=\frac{dR}{dx}\frac{d\Phi}{dy}+R\frac{d^2\Phi}{dxdy},\quad \frac{d^2R}{dxdy}=\frac{dR}{dy}\frac{d\Phi}{dy}+R\frac{d^2\Phi}{dy^2},$$

$$\frac{d^2R}{dxdy}=-\frac{dR}{dx}\frac{d\Phi}{dx}-R\frac{d^2\Phi}{dx^2},\quad \frac{d^2R}{dy^2}=-\frac{dR}{dy}\frac{d\Phi}{dx}-R\frac{d^2\Phi}{dxdy}.$$

Dans le cas où l'on a

$$\frac{dR}{dx}=\frac{dR}{dy}=\frac{d\Phi}{dx}=\frac{d\Phi}{dy}=0,$$

ces équations se transforment en:

$$\frac{d^2R}{dx^2}=R\frac{d^2\Phi}{dxdy}=-\frac{d^2R}{dy^2},\quad R\frac{d^2\Phi}{dx^2}=-\frac{d^2R}{dxdy}=-R\frac{d^2\Phi}{dy^2}\,.\,.\,(7)$$

De même, *lorsque les dérivées du premier et du second ordre de R et de Φ par rapport à x et à y s'annulent toutes*, on trouve facilement

$$\frac{d^3R}{dx^3}=R\frac{d^3\Phi}{dx^2dy}=-\frac{d^3R}{dxdy^2}=-R\frac{d^3\Phi}{dy^3}\text{ et}$$

$$R\frac{d^3\Phi}{dx^3}=-\frac{d^3R}{dx^2dy}=-R\frac{d^3\Phi}{dxdy^2}=\frac{d^3R}{dy^3};\quad.\;.\;.\;.\;.\quad(8)$$

et ainsi de suite.

Toutes ces relations nous serviront dans la suite.

6. Puisque, en chaque point du plan sur lequel les valeurs de z sont représentées, X, Y, R et Φ ont une valeur, mais seulement une, il passera par chaque point une de chacune de ces quatre espèces de lignes, et celles de la même espèce ne pourront jamais se couper.

Voyons maintenant si ces lignes ont des points singuliers et, en cas d'affirmative, où ces points sont situés. Considérons en premier lieu les lignes X et Y. Pour que, en un point du plan, ces lignes présentent un point singulier, il faut qu'en ce point on ait

$$\frac{dX}{dx}=\frac{dX}{dy}=0\text{ ou }\frac{dY}{dx}=\frac{dY}{dy}=0$$

ou, ce qui d'après (3) revient au même,

$$\frac{dX}{dx}=\frac{dY}{dx}=\frac{dX}{dy}=\frac{dY}{dy}=0.$$

Ces équations, il est facile de le voir, sont équivalentes à

$$f'(z) = 0.$$

Les points où les lignes X et Y montrent des points singuliers sont donc ceux qui correspondent aux racines de l'équation dérivée, ou, comme nous le dirons pour abréger, sont les racines de cette équation.

Les points singuliers des lignes Φ se trouvent là où il est satisfait aux équations

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\Phi}{dy} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

mais là, en vertu de (6), on a également

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{dy} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

de sorte que ces mêmes points sont aussi des points singuliers des courbes R.

De (9) il suit, puisque R est toujours fini,

$$\frac{X\frac{dY}{dx} - Y\frac{dX}{dx}}{R} = 0, \quad \frac{X\frac{dY}{dy} - Y\frac{dX}{dy}}{R} = 0.$$

Si l'on prend la somme des carrés de ces équations, on trouve, en ayant égard à (3),

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX}{dy}\right)^2 = 0,$$

d'où il résulte que les lignes R et Φ ont également des points singuliers dans les racines de l'équation dérivée.

Les équations (10) sont satisfaites aussi pour $R = 0$, c'est-à-dire dans les racines de l'équation elle-même. Ces points singuliers, toutefois, sont tous relatifs à une même ligne R, savoir $R = 0$, laquelle est uniquement composée de ces n points. Toutes les autres lignes R, de même que les lignes Φ, n'ont de points

singuliers que dans les racines de l'équation dérivée [1]).

7. Soit ψ l'angle que fait avec l'axe des x la tangente, au point x y, à la courbe X qui passe par ce point; on a alors

$$\frac{dX}{dx} + tg\,\psi \frac{dX}{dy} = 0.$$

Si ψ_1 a la même signification pour la ligne Y qui passe par ce même point, on a

$$\frac{dY}{dx} + tg\,\psi_1 \frac{dY}{dy} = 0,$$

d'où il suit, en ayant égard à (3),

$$tg\,\psi\, tg\,\psi_1 + 1 = 0.$$

Pareillement, si χ et χ_1 ont une signification analogue pour les lignes R et Φ, on trouve

$$tg\,\chi\, tg\,\chi_1 + 1 = 0.$$

Les lignes X et Y, de même que les lignes R et Φ, se coupent donc partout (sauf dans les racines de l'équation) à angle droit. Par conséquent, lorsque le paramètre γ des lignes X parcourt ses différentes valeurs, les lignes Y sont les chemins parcourus par les points de la ligne X; réciproquement, les points des lignes Y décrivent les lignes X, lorsque le paramètre δ varie. La même relation réciproque existe entre les lignes R et Φ [2])

[1]) Les lignes Φ, telles qu'elles ont été définies ci-dessus, se terminent brusquement dans les racines de l'équation. Au sens analytique, ce ne sont pas là, toutefois, des points singuliers, vu que les lignes Φ sont des courbes algébriques, qui se continuent avec d'autres lignes Φ, dont le paramètre est plus grand ou plus petit de la quantité π.

[2]) Les lignes X et Y, de même que les lignes R et Φ, forment un système de lignes isométriques, ainsi qu'il ressort des équations

$$(dX)^2 + (dY)^2 = \left\{ \left(\frac{dX}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dz}\right)^2 \right\} (dx^2 + dy^2)$$

$$\left(\frac{1}{R} dR\right)^2 + (d\Phi)^2 = \frac{1}{R} \left\{ \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2 \right\} (dx^2 + dy^2)$$

8. Dans les racines de l'équation dérivée on a

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + 2\, tg\, \psi \frac{d^2 X}{dx\,dy} + tg^2\, \psi \frac{d^2 X}{dy^2} = 0, \\ \frac{d^2 Y}{dx^2} + 2\, tg\, \psi_1 \frac{d^2 Y}{dx\,dy} + tg^2\, \psi_1 \frac{d^2 Y}{d^2 y} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . . (11)$$

Les racines de ces deux équations sont toujours réelles, et celles de la même équation sont toujours inverses l'une de l'autre et de signe contraire, de sorte que les points singuliers des lignes X et Y sont des points doubles réels, où deux branches de la courbe se coupent normalement. Cette conclusion cesserait d'être vraie si les dérivées de second ordre de X ou de Y disparaissaient toutes les trois, mais ce cas ne peut pas se présenter dans l'hypothèse admise, puisque deux des racines de l'équation dérivée seraient alors égales.

Des équations (11), combinées avec (4), il suit

$$tg\, 2\, \psi = -\frac{d^2 X}{dx^2} : \frac{d^2 X}{dxdy},$$

$$tg\, 2\, \psi_1 = -\frac{d^2 Y}{dx^2} : \frac{d^2 Y}{dx\,dy},$$

d'où, à l'aide de (4), on déduit facilement

$$tg\, 2\, \psi\, tg\, 2\, \psi_1 + 1 = 0.$$

On voit par là que, dans un point singulier, les branches de la ligne X partagent en deux parties égales les angles compris entre les branches de la ligne Y.

Il en est de même pour les lignes R et Φ, ainsi qu'on le reconnaît exactement de la même manière.

9. Renonçons, pour un instant, à l'hypothèse que l'équation dérivée n'ait pas de racines égales, et cherchons comment les lignes X et Y se comportent dans une racine double de cette équation. En un pareil point on a

$$\frac{d^2 X}{d x^2} = \frac{d^2 X}{dx\, dy} = \frac{d^2 X}{d y^2} = \frac{d^2 Y}{d x^2} = \frac{d^2 Y}{dx\, dy} = \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0,$$

ce qui résulte de ce que, en ce point, on doit avoir

$$f''(z) = 0\,.$$

On y a, en outre,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^3 X}{dx^3} + 3\, tg\,\psi \dfrac{d^3 X}{dx^2 dy} + 3\, tg^2\,\psi \dfrac{d^3 X}{dx dy^2} + tg^3.\psi\, \dfrac{d^3 X}{dy^3} = 0 \\ \dfrac{d^3 Y}{dx^3} + 3\, tg\,\psi_1 \dfrac{d^3 Y}{dx^2 dy} + 3\, tg^2 \psi^1 \dfrac{d^3 Y}{dx dy^2} + tg^3 \psi_1\, \dfrac{d^3 Y}{dy^3} = 0\end{array}\right\} . \quad (12)$$

En ayant égard à (5), on déduit de ces équations

$$tg\, 3\, \psi = -\frac{d^3 X}{dx^2 dy} : \frac{d^3 X}{dx^3},$$

$$tg\, 3\, \psi_1 = -\frac{d^3 Y}{dx^2 dy} : \frac{d^3 Y}{dx^3},$$

puis, à l'aide de (5),

$$tg\, 3\, \psi\, tg\, 3\, \psi_1 + 1 = 0.$$

On voit donc que les lignes X et Y sont composées de trois branches, qui se coupent sous des angles de 60°, et que les branches d'une des lignes partagent en deux parties égales les angles formés par celles de l'autre.

Le même résultat s'applique dans ce cas aux lignes R et Φ.

Il est facile de prévoir comment les choses se passeront si trois racines de l'équation dérivée, ou un plus grand nombre, viennent à se confondre.

10. En faisant la substitution $z = a + b\,i + z'\, e^{i\omega}$, on obtient une nouvelle équation en z'. Prend-on alors dans les deux équations des valeurs correspondantes de z et z', X et Y auront naturellement dans ces deux équations la même valeur; mais si l'on représente les valeurs de z' dans un autre plan, la situation des points correspondants, par rapport aux axes des x et des y, sera différente. Leur situation relative sera toutefois restée la

même. On a, en effet,

$$x = a + x' \cos \omega - y' \sin \omega,$$

$$y = b + y' \cos \omega + x' \sin \omega,$$

ce qui montre que la substitution revient à déplacer le système des axes, de telle sorte qu'un point quelconque $a + b\,i$ soit pris pour origine, et une droite quelconque pour axe des x.

Rien n'est donc changé, par cette substitution, à la forme ni à la situation relative des lignes X, Y, R et Φ. Si le terme $z' e^{i\omega}$ avait en outre été affecté d'un coefficient c, il en serait résulté non-seulement un déplacement du système d'axes, mais aussi une réduction ou un agrandissement proportionnels de toutes les dimensions de la figure.

Lorsqu'on multiplie l'équation donnée par un facteur complexe $f + g\,i$, les valeurs de X, Y, R et Φ changent.

Les lignes X et Y changent alors aussi, mais non les lignes R et Φ. En effet, les valeurs R sont toutes multipliées par une constante, et celles de Φ augmentées d'une constante. C'est ce qu'on reconnaît immédiatement en posant $f + g\,i = \varrho(\cos \nu + i \sin \nu)$; X est alors remplacé par $\varrho\, X \cos \nu - \varrho\, Y \sin \nu$, Y par $\varrho\, X \sin \nu + \varrho\, Y \cos \nu$, mais R par $R\,\varrho$ et Φ par $\Phi + \nu$.

11. Examinons maintenant ce que deviennent les lignes $R = \alpha$ lorsque α parcourt les valeurs de 0 à ∞. Pour de très petites valeurs de α, la ligne R consiste en n branches fermées entourant chacune une des racines de l'équation (1), car, pour $\alpha = 0$, elle consiste en ces n points eux-mêmes. Si α croît, on finira par atteindre une valeur de α pour laquelle la ligne R passera par une des racines de l'équation dérivée. Cela ne pourra avoir lieu que lorsque deux des branches fermées se seront approchées l'une de l'autre, car deux points d'une même branche fermée ne peuvent jamais s'approcher, chaque nouvelle ligne R devant embrasser toutes les précédentes, puisque deux lignes R ne peuvent passer par un même point. Au moment où α a atteint une valeur pour laquelle la ligne R passe par une des racines de l'équation dérivée, deux branches fermées se sont donc jointes

et forment une branche fermée continue, se coupant elle-même. Si α devient encore un peu plus grand, cette ligne se transforme en une branche fermée simple, qui maintenant entoure deux racines de l'équation (1) et une racine de la dérivée. Si α continue a croître, il arrive un moment où une seconde racine de la dérivée est atteinte et où deux autres branches, ou bien une des autres et les deux déjà réunies, se convertissent en une branche unique. On a donc alors deux branches qui entourent chacune deux racines de $f(z) = 0$ et une racine de $f'(z) = 0$, ou bien une branche unique entourant trois racines de l'équation (1) et deux de sa dérivée.

Ces mêmes transformations se répètent jusqu'à ce que, pour de très grandes valeurs de α, la ligne R soit réduite à une seule branche, qui entoure toutes les racines de (1) et toutes les racines de (2). Il peut arriver aussi que, pour une même valeur de α, la ligne R passe par deux ou plus de deux racines de la dérivée. Cela, toutefois, ne change rien à ce qui vient d'être dit, sauf qu'alors peut se faire d'un coup ce qui, en général, a lieu à des moments différents. Pour qu'il n'en fût pas ainsi, il faudrait que deux mêmes branches se joignissent en deux points différents, ce qui est impossible, car la courbe entourerait alors complètement une portion du plan dans laquelle n'est située aucune racine de l'équation (1). Or, à l'intérieur d'une pareille portion enclose, doit se trouver toujours un maximum ou un minimum de R, et cette fonction n'a nulle part de maximum et ne présente de minimum que dans les racines de l'équation. C'est ce dont on s'assure aisément en remarquant que la première condition pour un maximum ou un minimum;

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{dy} = 0,$$

n'est satisfaite, en outre des racines de l'équation, que dans les racines de la dérivée, mais qu'en ces derniers points manque une seconde condition nécessaire pour l'existence d'un maximum

ou d'un minimum, à savoir que $\frac{d^2 R}{dx^2}$ et $\frac{d^2 R}{dy^2}$ aient des signes égaux [1])

Notons, en passant, que la même chose s'applique aux fonctions X, Y et Φ, à cela près que celles-ci n'ont pas même de minimum dans les racines de l'équation donnée; en ces points, X et Y deviennent égales à 0, Φ devient indéterminée.

De ce qui précède, découle cettc propriété:

I. *Toute branche fermée d'une ligne R, qui embrasse p racines de l'équation* (1), *embrasse $p-1$ racines de sa dérivée.*

Car, en supposant que tel soit le cas à un instant donné,— et c'est le cas pour de très petites valeurs de α, chaque branche entourant alors une racine de l'équation et n'en entourant aucune de la dérivée, — il continuera toujours à en être ainsi. Au moment, en effet, où deux branches réunissent leur contenu, elles englobent une racine de l'équation dérivée. Si la première renfermait p racines de l'équation (1), et la seconde q, le nombre des racines de la dérivée, que ces branches contenaient à elles deux, était $p+q-2$, ce qui, avec la racine nouvellement englobée, donne encore $p+q-1$, conformément à la proposition ci-dessus énoncée.

12. La proposition I peut déjà être considérée comme une

---

1) Si toutes les dérivées secondes s'annulent également, ainsi que cela a lieu dans une racine double ou multiple de l'équation dérivee, la condition d'un maximum ou d'un minimum est que la première dérivée non annulée soit d'ordre pair et, cet ordre étant représenté par $2p$, que l'équation en λ

$$\frac{d^{2p} R}{dy^{2p}} \lambda^{2p} + \binom{2p}{1} \frac{d^{2p} R}{dy^{2p-1} dx} \lambda^{2p-1} + \binom{2p}{2} \frac{d^{2p} R}{dy^{2p-2} dx^2} \lambda^{2p-2} + \text{etc.} \ldots \frac{d^{2p} R}{d^{2p} x} = 0$$

n'ait aucune racine réelle. Or, d'après ce qui a été dit plus haut, cette équation n'a ici que des racines réelles, de sorte qu'il ne peut être question d'un maximum ou d'un minimum.

Comme R, à une distancc infinie, est partout $+\infty$, il doit y avoir quelque part un minimum de R. De ce qui précède, il résulte qu'un pareil minimum n'est possible que pour $R=0$; ainsi se trouve démontrée la propriété fondamentale des équations algebriques.

extension du théorème de Rolle. En effet, si tous les coefficients de l'équation $f(z) = 0$ sont réels, la figure formée par les lignes R est symétrique par rapport à l'axe des x. Les racines de la dérivée ne peuvent être situées que sur l'axe des x ou symétriquement par rapport à cet axe, en d'autres termes, elles ne peuvent être que réelles ou imaginaires conjuguées. Considérons maintenant deux racines réelles de l'équation (1). Primitivement, chacune d'elles est entourée par une courbe fermée, qui doit couper l'axe des x entre les deux racines. Ces deux branches devront tôt ou tard, soit directement, soit après s'être confondues avec d'autres branches, se joindre entre elles, et comme cela ne peut avoir lieu à la fois en deux points différents, il faut que le point où la jonction s'opère soit situé sur l'axe des x. Entre deux racines de l'équation (1) il peut aussi y avoir, sur l'axe des x, plus de une racine de la dérivée. Il peut arriver en effet que les deux courbes, dont chacune entourait d'abord l'une de deux racines conjuguées de $f(z) = 0$, se rencontrent sur l'axe des x, et qu'ainsi une courbe fermée vienne se placer entre les deux racines primitivement situées l'une à côté de l'autre. Il doit alors, outre la rencontre qui a déjà eu lieu, s'opérer encore deux autres rencontres, avant que les racines considérées tombent à l'intérieur de la même courbe. On voit facilement que, dans tous les cas, le nombre des racines intermédiaires de la dérivée doit être impair. Lorsque toutes les racines sont réelles, une semblable intercalation d'une courbe fermée ne peut se produire, et entre chaque paire de racines de l'équation (1) il ne peut donc se trouver qu'une seule racine de la dérivée.

13. Une autre propriété, qui peut avec encore plus de droit être regardée comme une extension du théorème de Rolle, résulte de la considération des lignes φ.

Chaque ligne φ est composée de n branches, qui, lorsqu'elles ne rencontrent pas de racine de la dérivée, partent chacune d'une des racines de l'équation (1) et s'étendent jusqu'à l'infini, sans se couper elles-mêmes ni entre elles. Seulement des lignes φ qui passent par une racine de la dérivée deux

branches se coupent en ce point, à angle droit. Les lignes Φ sont les chemins parcourus par les points des lignes R, lors de l'extension de ces dernières. Or, quand deux points de branches différentes des lignes R viennent à coïncider, ces deux points arrivent en direction opposée dans la racine de la dérivée où la coïncidence se fait, puis s'éloignent de chaque côté dans la direction perpendiculaire, suivant l'autre branche des lignes Φ. Les deux lignes Φ qui, parties de racines différentes de (1), aboutissent à une même racine de (2), peuvent donc être regardées comme le prolongement l'une de l'autre, tandis que les deux autres branches, normales aux premières, peuvent aussi être considérées comme une branche continue, qui s'étend des deux côtés à l'infini, à moins qu'une des deux moitiés ne rencontre quelque part une autre racine de l'équation dérivée. Il y a donc une ligne Φ qui joint deux racines de $f(z) = 0$, et sur laquelle est située une racine de la dérivée. Cette ligne Φ diffère toutefois, sous un rapport, des autres lignes Φ. Tandis que sur celles-ci la valeur de R croît régulièrement depuis le point de départ jusqu'à l'infini, sur la ligne en question la valeur de R croît jusqu'à ce que la racine de (2) soit atteinte, a un maximum en ce point, et redevient, dans l'autre racine de (1), égale à zéro, comme au départ. Sur l'autre branche, au contraire, qui coupe la première, R a en ce même point un minimum. Si l'on veut que la valeur de R croisse aussi de 0 à ∞ le long de cette ligne Φ, on doit, partant de l'une des racines de (1), suivre la ligne Φ jusqu'à la racine de (2), puis continuer suivant une des branches perpendiculaires. Tel est effectivement la trajectoire que décrit l'un des points de R pendant que α augmente.

Lorsque, α continuant à croître, la branche fermée de la ligne R se réunit de nouveau à une autre branche, les mêmes phénomènes se reproduisent. Si le point de la ligne R, où se fait cette nouvelle rencontre, n'est pas le même qui s'est déjà précédemment confondu avec un autre point, il a suivi, pour se rendre de l'une des racines situées à l'intérieur de la courbe au point de contact, une ligne Φ, et celle-ci se continue, à travers ce

point, jusqu'à une nouvelle racine de l'équation (1). Mais il peut arriver aussi que le point en question soit un de ceux qui ont déjà passé antérieurement par une racine de l'équation dérivée, et alors c'est une branche de la même ligne Φ qui, partant de la racine de $f'(z)$ traversée antérieurement, se rend, à travers une seconde racine de cette équation, à une nouvelle racine de $f(z)$, non sans émettre toutefois, aux deux côtés, dans la direction perpendiculaire, une nouvelle branche, qui en général se prolongera jusqu'à l'infini.

De tout ce qui vient d'être dit ressort la propriété suivante:

II. *Il y a $n-1$ lignes Φ, dont chacune, en général, unit l'une à l'autre deux racines de l'équation $f(z)=0$, de telle sorte que tous ces points soient reliés entre eux, et que nulle part il ne se forme de chaîne fermée. Sur chacune de ces lignes Φ se trouve une racine de $f'(z)=0$. Il peut toutefois arriver aussi que une ou plusieurs extrémités de ces lignes Φ de jonction ne soient pas situées en une racine de $f(z)$, mais en une racine de $f'(z)$, auquel cas cette ligne Φ est normale à celle sur laquelle se trouve cette racine de $f'(z)$.*

14. Cette propriété peut encore être exprimée comme il suit:

III. *Il y a $2n-2$ lignes Φ limitées, dont chacune unit une racine de $f'(z)=0$ à une racine de $f'(z)=0$ ou parfois l'une à l'autre deux racines de cette dernière équation, de telle sorte que tous ces points forment un système cohérent, mais que nulle part il ne se forme de chaîne fermée. Dans les racines de $f'(z)=0$ il y a toujours deux de ces lignes situées dans le prolongement l'une de l'autre. S'il aboutit encore une troisième ligne en un pareil point, celle-ci est normale aux deux autres, et s'il y en a une quatrième, elles forment ensemble une croix rectangulaire. Plus de quatre de ces lignes ne peuvent, dans les suppositions faites, converger en une même racine de l'équation dérivée. Lorsque quelques-unes de ces $2n-2$ lignes de jonction sont dans le prolongement l'une de l'autre, il y a entre chaque paire de racines de l'équation primitive un nombre impair de racines de la dérivée.*

Pour mettre ce dernier point hors de doute, on remarquera que R est un minimum dans les deux racines de l'équation (1); entre ces racines il doit donc y avoir un maximum, ou q maxima et $q-1$ minima, et à chacun de ces maxima ou minima correspond une racine de $f'(z)$ et vice-versa. En chaque racine de la dérivée où R est un minimum, il doit se trouver un point de croisement de lignes de jonction.

Lorsque tous les coefficients de l'équation sont réels, l'axe des x est une branche de la courbe $\Phi = 0$. La dernière partie de III reproduit alors le théorème de Rolle. Si, entre deux racines successives de (1), sont situées $2q + 1$ racines de la dérivée, il y en a q de celles-ci où R est un minimum dans la direction de l'axe des x, et par chacun de ces q points passe la ligne de jonction de deux racines imaginaires; de cette circonstance résulte donc aussi l'existence de $2q$ racines imaginaires.

15. La propriété trouvée se laisse formuler encore de la manière suivante.

IV. *En partant d'une racine quelconque de l'équation $f(z) = 0$, un point mobile peut atteindre d'une seule manière une autre racine quelconque de cette équation, sans quitter les lignes Φ. Dans ce trajet il rencontrera, entre deux racines quelconques de l'équation, par lesquelles il passe, au moins une racine de la dérivée.*

Le nombre des racines de la dérivée par lesquelles le point mobile doit passer, entre deux racines de l'équation elle-même, sans y changer brusquement de direction, est toujours impair.

16. Jusqu'ici nous avons supposé que ni l'équation, ni sa dérivée, n'avaient de racines égales. Lorsque l'équation a deux racines égales, les propriétés ci-dessus trouvées subsistent encore; seulement, la courbe R est alors composée initialement de $n-1$ branches, dont une entoure les deux racines confondues et, en même temps, la racine de (2) qui, comme on le sait, coïncide avec elles. De ce point, il est vrai, partent alors deux branches de chaque ligne Φ, mais cela ne change rien au raisonnement.

Les propositions I, II, III et IV restent donc vraies en ce cas, pourvu que, dans II et III, on remplace n par $n-1$. Même

quand l'équation compte deux ou plusieurs paires de racines égales, ou quand trois ou un plus grand nombre de racines viennent à y coïncider, tout ce que a été dit est encore valable, à une modification analogue près.

17. Il en est autrement lorsque l'équation dérivée présente deux racines égales. A la vérité, nos propositions restent applicables, légèrement modifiées, mais les démonstrations ont besoin d'un complément.

Voyons ce qui arrive dans une racine double de la dérivée lors de la jonction des lignes R. Puisqu'il doit se former un point triple, trois branches de la courbe R doivent se réunir en ce point. Les trois points, qui viennent s'y confondre, atteignent le point suivant des directions faisant entre elles des angles de 120°, et s'éloignent suivant des directions qui partagent ces angles par le milieu. Une racine double de $f'(z) = 0$ est donc, en général, unie à trois racines de $f(z) = 0$. Une des lignes de jonction peut toutefois être partie aussi d'une racine de $f'(z) = 0$, mais alors d'une racine où R est un minimum dans la direction de la ligne Φ considérée, et qui par conséquent, est unie latéralement à d'autres racines de $f(z) = 0$.

Des quatre propriétés trouvées, et dont les trois dernières ne sont que des formes différentes d'une même propriété, la première ne subit aucun changement, pourvu que les deux racines coïncidentes soient comptées pour deux. A la seconde, il faut ajouter ceci:

IIa. *Lorsque deux racines de $f'(z) = 0$ se confondent, deux des $n-1$ lignes Φ sont remplacées par trois lignes terminées dans la racine double et qui alors, sauf celle-ci, ne contiennent aucune autre racine de $f'(z) = 0$.*

La proposition générale peut être maintenue, si l'on considère deux de ces lignes comme une ligne unique brisée, et la troisième comme une seconde ligne de jonction. Des deux racines qui se confondent, l'une doit alors être regardée comme située sur la première ligne de jonction, l'autre comme située sur la seconde. On peut aussi compter double une des trois branches, et la concevoir comme formant tantôt avec l'une tantôt avec l'autre

des deux branches restantes une ligne de jonction continue, chacune de ces lignes contenant de nouveau une des deux racines confondues. On arrive à ce second mode d'interprétation en regardant le cas en question comme un cas limite, dans lequel la coïncidence a lieu entre deux racines de (2) qui étaient unies à une même racine de (1). Lorsqu'on le regarde, au contraire, comme un cas limite dans lequel viennent coïncider deux racines de (2) unies *l'une à l'autre*, on est conduit à la première interprétation. Deux racines de (2), qui ne sont unies ni entre elles ni à une même racine de (1), ne peuvent jamais être amenées à coïncider par un changement graduel des coefficients, sans que le système des lignes de jonction n'éprouve un changement, puisqu'il se formerait autrement une chaîne fermée de lignes de jonction. Il faut donc que, préalablement ou simultanément, d'autres réunions de racines ou de lignes Φ aient lieu.

La propriété III doit être complétée de cette manière:

III*a*. *Chaque paire de racines coïncidentes de la dérivée fait diminuer le nombre des lignes de* 1, *chaque paire de racines coïncidentes de l'équation elle-même le fait diminuer de* 2. *Dans une racine double de la dérivée on ne trouve plus maintenant deux lignes situées dans le prolongement l'une de l'autre, mais il y en a toujours trois, qui se rencontrent sous des angles de* 120°. *En un pareil point peuvent encore concourir tout au plus trois autres lignes, et celles-ci coupent par le milieu les angles compris entre les premières.*

A la dernière partie de la proposition il n'y a rien à changer, pourvu qu'on compte pour deux les racines coïncidentes, R n'ayant en ces points ni maximum ni minimum.

Quant à la proposition IV, le second alinéa cesse d'être vrai dans le cas en question.

18. On trouve, sans plus de peine, ce qui doit advenir lorsque trois des racines de la dérivée coïncident. Quatre branches fermées de la ligne R atteignent alors simultanément le même point, et se transforment pour un instant en une courbe à point quadruple, puis en une branche fermée unique.

Les propositions précédemment démontrées restent applicables, avec de légères modifications. La racine triple de la dérivée est, en général, reliée à quatre racines de $f(z) = 0$, par des lignes de jonction disposées en croix. Une ou plusieurs de ces lignes peuvent toutefois avoir aussi leur autre extrémité dans une racine de la dérivée, mais cette racine est alors toujours unie latéralement à d'autres racines. Outre ces quatre lignes, il peut y en avoir tout au plus quatre autres qui aboutissent en ce même point; celles-ci ont toujours leur extrémité opposée dans une racine de la dérivée, et chacune d'elles partage en deux parties égales un des quatre angles droits formés par les quatre premières lignes.

Après ce qui précède, il sera facile de voir comment les choses se passent lorsque le nombre des racines égales de l'équation dérivée est supérieur à trois.

Un cas particulier, qui mérite encore d'être signalé, est celui où toutes les racines de la dérivée tombent en un même point. Les racines de (1) sont alors situées aux sommets d'un polygone régulier, dont le centre est la racine multiple, de l'ordre $n-1$, de l'équation (2), et toutes les racines de (1) sont unies à cette racine multiple de (2) par des lignes Φ droites.

19. L'examen spécial des lignes X et Y va nous faire connaître encore quelques nouvelles propriétés. Une ligne X étant une courbe algébrique du degré n, elle aura en général n asymptotes; et ces asymptotes seront ici toutes réelles. En effet, si l'on chasse de l'équation le terme en z^{n-1}, au moyen d'une substitution qui, comme nous l'avons vu, équivaut à un déplacement du système d'axes, et que dans l'équation ainsi obtenue

$$A_n e^{i\alpha_n} z^n + A_{n-2} e^{i\alpha_{n-2}} z^{n-2} + \text{etc.} \dots + A_0 e^{i\alpha_0} = 0$$

on pose

$$z = re^{i\varphi},$$

il vient:

$$X = A_n r^n \cos(n\varphi + \alpha_n) + A_{n-2} r^{n-2} \cos((n-2)\varphi + \alpha_{n-2}) + \text{etc.}$$

La courbe

$$X = \gamma$$

aura donc les mêmes asymptotes que

$$r^n \cos(n\varphi + \alpha_n) = \frac{\gamma}{A_n} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

laquelle, ainsi qu'on le reconnaît aisément, a n asymptotes, qui se coupent à l'origine des coordonnées et partagent en $2n$ parties égales les quatre angles droits formés autour de ce point.

20. Pour de grandes valeurs de γ la ligne X se compose de n branches, qui ont chacune deux asymptotes, entre lesquelles il ne se trouve pas d'autres asymptotes. En effet, lorsque γ est très grand, la plus petite valeur que puisse avoir r est encore très grande, et d'autant plus grande que γ est plus grand. Mais, pour de grandes valeurs de r, le signe de X dépend exclusivement, sauf lorsque $\cos(n\varphi + \alpha_n)$ est très petit, du premier terme. Il suit de là que, sauf au voisinage immédiat des asymptotes, la ligne X ne peut avoir des points dans les angles, formés par les asymptotes, dans lesquels la courbe (13) n'a pas de points.

Tout cela s'applique aussi aux lignes Y, avec cette différence que les lignes Y ont les mêmes asymptotes que la courbe

$$r^n \sin(n\varphi + \alpha_n) = \frac{\delta}{A_n} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Cette courbe ne diffère point de (13) par la forme, mais seulement par les dimensions et par la situation relativement aux axes. En suivant un cercle de grand rayon, on rencontrera alternativement une branche de la ligne X et une branche de la ligne Y. Entre deux branches successives de la ligne X, lesquelles se prolongent à l'infini, il y a donc une, mais seulement une, branche infinie de la ligne Y, et réciproquement. Comme toutes les asymptotes sont réelles, aucune ligne X ou Y ne peut avoir de branche fermée.

21. Sur une branche d'une ligne X, qui ne passe pas par une racine de l'équation dérivée, Y ne peut être nulle part un maximum ou un minimum, et ne peut donc prendre qu'une fois une valeur déterminée. Chaque branche d'une ligne X ne peut donc être coupée qu'une fois par une même ligne Y. Quant au

nombre total des points d'intersection d'une ligne X et d'une ligne Y, il est égal à n, car ces points sont les racines de l'équation

$$f(z) = \gamma + i\,\delta.$$

V. *Toute branche d'une ligne X, qui ne passe pas par une racine de la dérivée, doit donc être coupée une fois par chaque ligne Y, et réciproquement* [1]).

Comme cas particulier de cette propriété, on a celle-ci:

VI. *Lorsque la ligne $X = 0$ ou $Y = 0$ ne passe pas par une racine de la dérivée, il y a sur chaque branche de chacune de ces lignes une racine de l'équation primitive.*

V^a. *Lorsqu'une ligne X passe par une racine de l'équation dérivée, la valeur de Y, en ce point, est un maximum ou un minimum, un maximum suivant l'une et un minimum suivant l'autre des deux branches de la ligne X qui se coupent en ce point. Sur l'une des branches se trouvent alors deux points d'intersection avec une ligne Y quelconque, tandis qu'il n'y en a aucun sur l'autre.*

VI^a. *Lorsqu'une des lignes $X = 0$ ou $Y = 0$ passe par une racine de la dérivée, l'une des branches qui se coupent en ce point contient deux racines de l'équation, l'autre branche n'en contient aucune. Les deux racines sont situées aux deux côtés du point d'intersection.*

On trouve de même:

VI^b. *Lorsqu'une branche de la ligne $X = 0$ ou $Y = 0$ passe par p racines de la dérivée, il y a sur cette branche $p+1$ racines de l'équation, ou $p + 1$ moins un nombre pair. S'il y en a $p+1$, deux racines successives comprennent chaque fois entre elles une racine de la dérivée. S'il y en a moins, celles qui manquent sont situées deux à deux sur les branches par lesquelles la branche considérée est coupée dans les racines de la dérivée.*

---

[1]) En remarquant que la valeur de Y, le long de chaque branche d'une ligne X, doit croître de $-\infty$ à $+\infty$, on voit que la proposition ci-dessus peut aussi être démontrée indépendamment de la propriété fondamentale des équations algébriques, et alors il en résulte immédiatement que toute équation du degré n a n racines.

Lorsque la ligne $X = 0$ ou $Y = 0$ passe par une racine double de la dérivée, il y a de nouveau sur chaque branche une racine de l'équation elle-même. Si la ligne passe par une racine triple, deux des quatre branches contiennent chacune deux racines, les deux autres branches n'en contenant pas; et ainsi de suite.

22. Pour une équation à coefficients réels, l'axe des x est toujours une branche de la ligne $Y = 0$. Si l'équation a plus d'une racine réelle, l'axe des x doit donc passer par une ou plusieurs racines de la dérivée, de telle sorte que, entre deux racines réelles de l'équation, il y ait toujours au moins une racine réelle de la dérivée. Si toutes les racines sont réelles, $n-1$ branches de la ligne $Y = 0$ doivent couper à angle droit l'axe des x, et, puisqu'elles ne peuvent se couper entre elles, partager le plan en n bandes. Chacune de ces bandes contient une des branches de la ligne $X = 0$, puisque celles-ci ne peuvent couper nulle part les autres branches de la ligne $Y = 0$. Cette ligne X partage donc aussi le plan en $n + 1$ bandes, qui, à l'exception des deux extrêmes, limitées d'un côté seulement, contiennent chacune une racine de la dérivée.

23. Cette dernière propriété est, à son tour, un cas particulier d'une propriété plus générale, que nous allons démontrer, et qui peut s'énoncer ainsi:

VII. *Toute ligne X ou Y qui ne passe pas par une racine de la dérivée, et qui consiste donc en n branches séparées, divise le plan en $n + 1$ parties, et dans chacune de ces parties le nombre des racines de la dérivée est inférieur d'une unité au nombre des branches qui contribuent à la délimitation de cette partie.*

Il est évident, d'abord, que cette propriété se vérifie pour de très grandes valeurs, positives ou négatives, de γ ou de δ. Ces quantités, en effet, peuvent toujours être prises assez grandes pour que chacune des n branches, dont se compose alors la ligne X ou Y, découpe du plan une partie ne contenant aucune racine de la dérivée. Ces n parties sont limitées chacune par une branche unique, et la partie restante, qui contient toutes les $n-1$ racines de la dérivée, est limitée par toutes les branches. Il reste donc

à montrer que, si la règle vaut pour l'une ou l'autre valeur de γ ou de δ, elle vaudra pour toutes les valeurs. A cet effet, voyons ce qui arrive lorsque, γ ou δ croissant, la ligne X ou Y franchit une racine de la dérivée. Il est clair qu'à ces occasions seules la distribution des racines sur les différentes parties du plan peut changer. Les deux points des deux branches de la ligne X ou Y, qui se rapprochent l'un de l'autre, arrivent dans des directions opposées, le long d'une des branches d'une ligne Y ou X, puis s'éloignent dans deux directions opposées, perpendiculaires à celles dans lesquelles ils sont venus. Les deux moitiés des différentes branches, qui se trouvaient au même côté de la ligne X ou Y décrite, se réunissent en une nouvelle branche, et il en est de même des deux autres moitiés. Par là, deux parties du plan, qui précédemment étaient séparées, sont réunies, tandis que le nombre total de leurs lignes de démarcation n'a pas varié. Le nombre des racines qu'elles contiennent est augmenté d'une unité, ainsi que cela doit être pour que la proposition reste vraie. A l'autre côté, la partie du plan, dans laquelle était située précédemment la racine qui vient d'être franchie, est divisée en deux pièces. Il s'agit de savoir si les autres racines que cette partie pouvait encore contenir sont distribuées sur les deux pièces conformément à la propriété énoncée. En ce qui concerne le nombre total de ces racines, il est satisfait à la propriété; si leur distribution entre les deux pièces n'était pas conforme à la propriété, une de ces pièces renfermerait donc trop de racines et, si souvent qu'elle fût de nouveau coupée en deux, il resterait toujours une partie contenant plus de racines qu'elle ne devrait en contenir. Or, finalement, pour de très grandes valeurs positives de γ ou δ, la distribution redeviendra, comme elle l'était au début pour de très grandes valeurs négatives des paramètres, celle que la propriété indique. Peut-être l'idée se présentera-t-elle qu'une partie trop riche en racines pourrait, avant que l'état final ne soit établi, se réunir à une autre partie, contenant trop peu de racines; mais cela est impossible, le changement ultérieur d'une pareille partie devant toujours consister en une réduction. La partie cen-

trale primitive est successivement divisée et subdivisée, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus que n pièces limitées chacune par une branche unique, tandis que les parties qui originairement n'avaient chacune qu'une seule ligne de démarcation se réunissent successivement l'une à l'autre et forment une nouvelle partie centrale.

La proposition est ainsi démontrée, pour le cas où l'équation $f(z) = 0$ n'a pas de racines égales ou multiples. Lorsqu'elle en possède, la démonstration est encore valable, moyennant une légère modification. Dans une racine double, trois parties du plan se réunissent en une seule et englobent la racine double, tandis qu'une autre partie perd cette racine double et en même temps est divisée en trois pièces. Dans une racine triple, quatre parties viennent se confondre, tandis qu'une autre partie est partagée en quatre, et ainsi de suite [1]).

Pour certaines équations, on peut trouver pour γ ou δ des valeurs telles que toutes les parties du plan, à l'exception des deux extrêmes, soient des bandes limitées par deux branches. Cela est le cas, entre autres, pour toutes les équations du second et du troisième degré, et, comme nous l'avons vu, pour les équations à n racines réelles; à la condition, toutefois, que l'équation dérivée n'ait pas de racines égales, ce qui pourrait arriver chez les équations du 3e degré.

24. Supposons une équation dont toutes les racines soient réelles ou situées au côté positif de l'axe des x [2]). La valeur de R est le produit des modules des différents facteurs radicaux $z-a$, où a représente une racine. Pour toutes les racines réelles,

---

1) Les propriétés qui viennent d'être démontrées pour les lignes X et Y subsistent aussi et se démontrent de la même manière pour les lignes

$$fX + gY = \varepsilon,$$

où f, g et ε représentent des constantes réelles. Ces lignes peuvent du reste être transformées en lignes X et Y, si l'on multiplie l'équation par une constante complexe.

A cette classe de courbes appartiennent toutes les lignes Φ, lorsqu'on regarde comme une ligne unique deux lignes Φ pour lesquelles β a une différence de $\frac{1}{2}\pi$.

2) C'est-à-dire, au côté où les valeurs de y sont positives.

ce module a des valeurs égales en deux points situés symétriquement par rapport à l'axe des x, et pour les autres racines il est plus petit dans les points situés au côté positif de cet axe que dans les points correspondants situés au côté négatif. Cela s'applique donc aussi aux valeurs du produit R lui-même. Les lignes fermées R, en tant qu'elles entourent les racines réelles, s'étendent donc plus loin au côté positif qu'au côté négatif; les moitiés situées au côté positif envelopperont les images par symétrie des parties situées au côté négatif. Il suit de là que les points où les lignes fermées R se réunissent, autrement dit les racines de l'équation dérivée, doivent tous se trouver au côté positif de l'axe des x. Or toute ligne droite pouvant être prise pour axe des x, on a la proposition suivante:

VIII. *Toute ligne droite qui passe par une racine de la dérivée doit contenir toutes les racines de l'équation, ou bien il doit y avoir des racines aux deux côtés de cette droite.*

De là découle encore cette conséquence:

IX. *Lorsque toutes les racines de l'équation sont jointes entre elles par des lignes droites, toutes les racines de la dérivée se trouvent à l'intérieur du polygone ainsi formé.*

25. La $n^{\text{ième}}$ partie de la somme des racines de l'équation est égale à la $n-1^{\text{ième}}$ partie de la somme des racines de la dérivée.

On a donc:

X. *Les racines de l'équation et celles de la dérivée, considérées comme des points matériels de masse égale, ont le même centre de gravité. Cela s'applique aussi aux racines des dérivées suivantes. Ce centre de gravité est donc la racine unique de la dérivée* $n-1^{\text{ième}}$ [1]).

26. Considérons maintenant, en ayant égard à ce qui précède, une équation quelconque du troisième degré. Au moyen d'une substitution semblable à celle dont il a été question au § 10, nous ferons passer l'axe des x par le centre de gravité des racines, en même temps que par les deux racines de la dérivée, et nous choisirons le premier de ces points pour origine. L'équation prend

---

1) C'est aussi le point d'intersection des asymptotes des lignes X et Y.

alors la forme

$$z^3 - 3a^2z + B = 0,$$

où a représente une constante réelle et B une constante quelconque, en général complexe. Soit $B = b + ic$, l'équation des lignes Φ est alors

$$\frac{3x^2y - y^3 - 3a^2y + c}{x^3 - 3xy^2 - 3a^2x + b} = \text{constante.}$$

Pour déterminer la constante de telle sorte que la ligne Φ passe par une des racines de la dérivée, nous calculons la valeur du premier membre pour $x = \pm a$, $y = 0$. On trouve ainsi:

$$\frac{3x^2y - y^3 - 3a^2y + c}{x^3 - 3xy^2 - 3a^2x + b} = \frac{c}{\pm 2a^3 + b}.$$

On voit que les lignes Φ qui passent par les deux racines de la dérivée sont en général différentes. Deux des racines d'une équation du troisième degré seront donc, en général, unies à la troisième par une ligne Φ, et chacune de ces lignes de jonction passera par une racine de la dérivée. Deux cas font exception à cette règle. Le premier est celui de $a = 0$. Dans ce cas, les deux racines de la dérivée sont égales, et les trois racines de l'équation elle-même sont situées aux sommets d'un triangle équilatéral. La ligne Φ, qui passe par les trois racines de l'équation et par les racines coïncidentes de la dérivée, est composée de trois lignes droites, qui se coupent, sous des angles de 60°, au point nommé en dernier lieu.

Le second cas exceptionnel est celui de $c = 0$. L'équation de la ligne Φ est alors

$$3x^2y - y^3 - 3a^2y = 0.$$

La ligne se compose donc de l'axe des x et de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 0.$$

Ces lignes se coupent, comme cela doit être, aux points $+a$ et $-a$. Les coefficients de l'équation sont maintenant tous réels. Les racines peuvent être toutes réelles et se trouver par con-

séquent sur l'axe des x; il y en a alors une entre les deux branches de l'hyperbole, et une à l'intérieur de chacune de ces branches. Ou bien, l'une des racines est réelle, et les deux autres sont conjuguées. La première est alors située sur l'axe des x, les deux autres se trouvent sur l'une des branches de l'hyperbole. Dans ce cas, deux des racines de l'équation sont donc unies entre elles par une ligne Φ, et la racine de la dérivée, qui est située sur cette ligne de jonction, est reliée, à travers une autre racine de la dérivée, à la troisième racine de l'équation. Pour que ce cas se présente, il faut donc qne les trois racines de l'équation occupent les sommets d'un triangle isocèle. Ce triangle, toutefois, doit encore satisfaire à une certaine condition. Soient, en effet, x_1 la racine réelle et $x_2 \pm i y_2$ les racines imaginaires de l'équation, et désignons par P, Q et R les points qui représentent ces racines; on a alors $Q R^2 = 4 y_2{}^2$, $PR^2 = PQ^2 = y_2{}^2 + (x_1 - x_2)^2$, ou, puisque $x_1 = -2 x_2$, $PQ^2 = y_2{}^2 + 9 x_2{}^2$. Mais le point $x_2\, y_2$ se trouve sur l'hyperbole, de sorte qu'on a

$$PQ^2 = 12 x_2{}^2 - 3 a^2,$$
$$QR^2 = 12 x_2{}^2 - 12 a^2.$$

La seconde de ces valeurs est donc toujours plus petite que la première, la base du triangle isocèle est plus petite que l'un des côtés latéraux. Cette condition est d'ailleurs suffisante, car le rapport $\dfrac{12 x_2{}^2 - 3 a^2}{12 x_2{}^2 - 12 a^2}$ peut prendre toutes les valeurs entre 1 et ∞, puisque $x_2{}^2$ peut varier de a^2 à ∞ pour des valeurs différentes de b.

Un triangle isocèle, dont les côtés latéraux seraient plus petits que la base, viendrait se placer, les coordonnées ayant la direction admise, de manière que la base fût parallèle à l'axe des x; b serait dans ce cas égal à zéro. Les deux lignes Φ, dont chacune passe alors par une racine de la dérivée, sont situées symétriquement par rapport à l'axe des y. Elles unissent chacune une des extrémités de la base du triangle à son sommet. Toutes les deux sont des courbes du troisième degré.

Représentons-nous maintenant le cas général, celui où le triangle formé par les racines de l'équation est scalène. Faisons varier graduellement a, b et c, de manière que le côté le plus petit devienne égal au moyen, les deux autres conservant la même valeur. Durant ce changement, aucune fusion ne s'opère ni entre des racines de l'équation, ni entre des racines de sa dérivée, ni entre des lignes Φ, et il ne peut donc y avoir rien de changé à la manière dont les racines sont unies par des lignes Φ. Il suit de là que, dans le cas général, celle des racines de l'équation, où se rencontrent le côté le plus petit et le côté moyen du triangle, est unie aux deux autres par des lignes Φ, tandis qu'entre ces deux dernières racines il n'existe pas de semblable liaison.

27. Presque tout ce que nous avons démontré dans ce qui précède, peut être déduit plus brièvement de considérations se rattachant à la théorie de Riemann. Posons, à cet effet,

$$f(z) = X + i\,Y = Re^{i\Phi} = w,$$

et, de même que nous avons représenté les valeurs de z dans un plan, représentons aussi celles de w dans un second plan, le plan des w; les figures formées dans ce plan des w sont alors, dans les parties infiniment petites, semblables à celles formées dans le plan des z. Le plan des z est un plan simple, le plan des w est une surface de Riemann, composée de n feuilles.

Désignons les racines de

$$f(z) = 0,$$

dans le plan des z, par a_1, a_2 . . . a_n; celles de la dérivée, dans le même plan, par b_1, b_2, . . . b_{n-1}; les points qui correspondent à a_1, a_2 . . . a_n dans le plan w, par o_1, o_2 . . . o_n, et ceux qui correspondent à b_1, b_2 . . . b_{n-1} par c_1, c_2 . . . c_{n-1}; les points o_1 etc. sont alors tous situés les uns au-dessus des autres, à l'origine. Les points de ramification, où les feuilles du plan des w s'unissent l'une à l'autre, sont les points où deux valeurs z deviennent égales pour une même valeur de w, c'est-à-dire les points c. Comme il n'y a que $n-1$ de ces points, juste assez pour faire cohérer toutes les n feuilles du plan

des w, cette surface est simplement connexe, les mêmes deux feuilles ne pouvant être unies en plus de un point. Les sections de ramification ne peuvent donc être menées qu'à partir des points c, jusqu'à l'infini.

Les représentations des lignes X, Y, Φ et R dans le plan des w sont respectivement des droites parallèles à l'axe des y, des droites parallèles à l'axe des x, des droites rayonnant de l'origine, et des cercles ayant l'origine pour centre.

28. Considérons, dans le plan des w, un cercle $R = constante$, qui entoure p points c. Cette ligne consiste, à proprement parler, en n cercles, situés chacun sur une des feuilles. Ces cercles rencontrent p sections de ramification, de sorte qu'ils sont connexes de p manières et consistent donc proprement en $n-p$ courbes fermées, isolées l'une de l'autre, qui se peignent sur le plan des z en un nombre égal de branches fermées. Considérons, en particulier, une de ces lignes fermées, qui rencontre q sections de ramification et est donc située dans $q + 1$ feuilles. La partie du plan des w, délimitée par cette ligne, renferme q points de liaison c et $q + 1$ points o. Sa représentation sur le plan des z contient donc q points b et $q + 1$ points a, ce qui démontre la proposition I.

29. Quelque chose d'analogue a lieu pour les lignes X qui ne passent pas par un point b. Les lignes correspondantes dans le plan des w consistent en n droites, situées l'une au dessus de l'autre, chacune sur une des feuilles, ou, si elles rencontrent une section de ramification, y changeant de feuille, deux à deux. Ces droites divisent toujours le plan des w en $n + 1$ parties complètement séparées. Lorsqu'une pareille partie renferme q points de ramification c, il faut $q + 1$ de ces droites pour la séparer entièrement des autres. En passant maintenant à la représentation sur le plan des z, on reconnaît immédiatement que chaque ligne X divise ce plan en $n + 1$ parties, et que, si $q + 1$ branches de la ligne X contribuent à la délimitation d'une de ces parties, celle-ci contient q points b, et par conséquent q racines de la dérivée. Suivant le même raisonnement, ce résultat

s'applique aussi aux lignes Y, ou aux lignes

$$a X + b Y = \text{constante.},$$

ou, plus généralement encore, à toutes les lignes qui se peignent sur le plan des w, considéré comme plan simple, sous la forme d'une branche se prolongeant des deux côtés jusqu'à l'infini et ne passant pas par un point c, par exemple à la ligne

$$a X + b Y = F(a' X + b' Y), \ldots\ldots\ldots (15)$$

si $F(\nu)$ représente une fonction univalente de ν.

30. Tout ce qui précède reste vrai lorsque quelques-uns des points b coïncident. Supposons, par exemple, que cela soit le cas pour p de ces points; le point correspondant du plan des w est alors un point de ramification, où $p + 1$ feuilles se réunissent. Ceci pris en considération, il n'y a rien à changer aux raisonnements ci-dessus.

Lorsque deux ou plusieurs points a se confondent, l'origine est située, dans le plan des w, en un des points c, mais cette circonstance n'a pas non plus d'influence sur le raisonnement.

31. Une ligne X, Y, Φ ou R, — ou en général une ligne (15) dont la représentation passe par un point c, est située sur toutes les feuilles du plan des w et ne présente aucune singularité au point c, — a au point b correspondant deux branches, qui se coupent à angle droit. Une des branches continues, sur le plan des z, correspond alors aux deux branches qui se réunissent dans le point de ramification et plus loin se superposent. L'autre branche continue correspond aux deux autres branches superposées.

Lorsqu'une pareille ligne, dans le plan des w, passe par un point de ramification double, c'est-à-dire par un point où trois feuilles se réunissent et qui correspond à une racine double de l'équation dérivée, il y a six branches à distinguer. Désignons par 1 et 2 les branches situées sur la feuille supérieure, par 3 et 4 celles de la seconde feuille et par 5 et 6 celles de la troisième, de telle sorte que les branches de numéro impair se recouvrent, et de même les branches de numéro pair; les représentations de ces branches sur le plan des z forment alors une rosette, dont

les branches se succèdent dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6, et font entre elles des angles égaux. On trouve quelque chose d'analogue dans le cas où trois racines de la dérivée, ou plus, deviennent égales. Ainsi est déterminée la forme que les lignes X, Y, R et Φ présentent aux points b.

32. Considérons dans le plan des w une droite $\Phi =$ constante, qui passe par un des points c, par exemple par c_1, et admettons que ce point unisse les feuilles où se trouvent o_1 et o_2. Supposons provisoirement que cette droite ne rencontre aucun autre point c situé sur une de ces feuilles.

Suivons cette droite de o_1 à c_1 et de là à o_2; le point correspondant du plan z décrit alors une ligne Φ continue, de a_1, par b_1, à a_2. Il y a $n-1$ de ces lignes de jonction, puisqu'il y a $n-1$ points c; elles sont donc tout juste en nombre suffisant pour unir entre eux tous les points a, sans qu'il se forme de chaîne fermée.

Il en est un peu autrement lorsque deux points c, par exemple c_1 et c_2, qui à eux deux unissent trois feuilles, sont situés en ligne droite avec l'origine. Supposons que c_1 unisse les feuilles où se trouvent o_1 et o_2 et que nous appellerons dorénavant les feuilles 1 et 2, et c_2 les feuilles 2 et 3; supposons, en outre, que c_2 soit plus éloigné de l'origine que c_1. On peut alors aller, le long de la droite $\Phi =$ constante, de o_1 à c_1 et à partir de là, suivre différents chemins. D'abord, on peut se rendre en o_2, ce qui donne de nouveau lieu, dans le plan des z, à la description d'une ligne Φ continue, unissant a_1 à a_2, en passant par b_1. Mais on peut aussi aller de c_1 à c_2 et de là à o_3. Dans ce cas, le point correspondant sur le plan des z suit, à partir de b_1, la branche de la ligne Φ qui est perpendiculaire à la branche décrite en premier lieu, et va, par b_2, à a_3. Il n'est pas difficile de trouver comment les choses se passent lorsque plus de deux points c, qui sans l'aide d'autres points d'union unissent différentes feuilles l'une à l'autre, sont situés sur une même ligne droite.

33. Lorsqu'il y a un point c, par exemple c_1, qui correspond

à une racine double de la dérivée et qui unit donc entre elles trois feuilles, par exemple 1, 2 et 3, on peut aller de o_1, par c_1, à o_2, ou bien à o_3. Les lignes Φ qui correspondent dans le plan des z à ces chemins forment entre elles, en b_1, des angles de 120°. Si, sur la même ligne droite, dans l'une des trois feuilles, il se trouve encore un second point c, par exemple c_2, plus éloigné de l'origine que c_1, on peut aller de c_1 à c_2, d'où résulte sur le plan des z une ligne Φ qui partage en deux parties égales l'un des trois angles de 120°. Il est superflu d'examiner spécialement un plus grand nombre de cas. On voit que les propositions II, III et IV découlent de ces considérations.

Il ne semble guère nécessaire non plus, après les détails dans lesquels nous venons d'entrer, de faire voir comment, à l'exception des propositions VIII, IX et X, tout ce qui a été démontré précédemment peut être trouvé aussi en ayant égard à la corrélation entre les représentations sur le plan des z et celles sur le plan des w.

J'ai été conduit à m'occuper de la question traitée dans ce qui précède à la suite d'une communication verbale de M. Legebeke, concernant quelques recherches faites à ce sujet par lui-même et par MM. van den Berg et Stieltjes.

Dans cette communication, le théorème ci-dessus marqué n°. IX, et déjà démontré antérieurement de différentes manières par M. Legebeke (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, t. VIII, et, avec quelques modifications, *Archives néerlandaises*, t.XVI, p.273—278), était rappelé, avec la démonstration mécanique donnée par M. van den Berg dans le t. IX du *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1882. La démonstration du théorème de Rolle, déduite de ces mêmes considérations par M. van den Berg, y était également exposée.

M. Legebeke décrivait ensuite la forme que les lignes R et Φ prennent dans les racines de l'équation dérivée et la manière dont les lignes R se comportent lorsque la valeur de R croît, — en

citant comme source un travail de M. Stieltjes, inséré dans les *Archives néerlandaises*. Enfin, il disait avoir essayé de mener les lignes Φ par deux racines de l'équation, et avoir reconnu que, si cela était possible, chacune de ces lignes Φ, devrait contenir une racine de la dérivée.

Plus tard, ayant consulté les Mémoires cités par M. Legebeke, j'y ai retrouvé, outre les points dont il avait fait mention, ceux qui suivent.

M. Stieltjes (*Quelques considérations sur la fonction rationnelle entière d'une variable complexe*, dans *Arch. néerl.*, t. XVIII, p. 1) a étudié en détail la marche de la valeur de R dans le plan des z, et a notamment signalé une erreur qui se trouve, entre autres, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXI, et qui consiste à attribuer à R une valeur maximum dans les racines de l'équation dérivée.

Dans le Mémoire de M. van den Berg je rencontre ma proposition X, ainsi qu'une proposition du même genre, à savoir, que les axes d'inertie principaux sont aussi les mêmes pour les deux systèmes de points. Il s'y trouve encore d'autres propriétés de nature mécanique, mais qui n'ont avec notre sujet que des rapports plus éloignés.

Ce Mémoire contient, en outre, une étude de l'équation générale du troisième degré, étude qui naturellement présente quelques points d'analogie avec la mienne, mais qui est beaucoup plus détaillée et conduit à plusieurs propriétés intéressantes. La plus remarquable, sans contredit, est celle qui détermine complètement la situation des deux racines de la dérivée par rapport aux trois racines de l'équation. M. van den Berg montre que ces deux points sont les foyers de l'ellipse la plus grande qui puisse être inscrite dans le triangle.

Le Mémoire de M. van den Berg est suivi, dans le même cahier du *Nieuw Archief voor Wiskunde*, p. 60, d'un supplément, dans lequel sont encore cités, comme ayant rapport à notre sujet, les articles suivants:

Comptes rendus de l'Académie des sciences, t. LXXVIII, 1874.

Notes de M. F. Lucas, p. 140—144, 180—183, 271—274; Propriétés géométriques des fractions rationnelles.

Note de M. Laguerre, p. 278—283: Sur la théorie des équations numériques.

Ibid., t. LXXXIX, 1879, p. 224—226; Note de M. Lucas: Sur une application de la mécanique rationnelle à la théorie des équations.

Ibid., t. LXXVII, 1874, p. 431—433, Note de M. Lucas: Théorème concernant les équations algébriques.

F. Lucas, *Etudes analytiques sur la théorie générale des courbes planes*, 1864.

Gauss, *Werke*, t. III, 1866, p. 112. (*Göttinger gelehrte Anzeigen*, 1816, 2 mars).

Dans les ouvrages de Gauss on trouve d'ailleurs, en maint endroit, des choses qui touchent ce même sujet. C'est ainsi, entre autres, que la quatrième démonstration de Gauss, pour la propriété fondamentale des équations algébriques, est identique à celle que j'ai déduite, dans la note au paragraphe 21, de la proposition VI.

M. Stieltjes, qui a appelé mon attention sur cette identité, me communique encore la propriété suivante: *Toute droite qui n'est pas parallèle à l'une des asymptotes des lignes X ou Y, et qui a toutes les racines de l'équation au même côté, doit couper chacune des n branches des lignes $X=0$ et $Y=0$ en un point, et ces points d'intersection alternent entre eux.* Cette propriété suit immédiatement de ma proposition VIII. Une pareille droite a, en effet, au côté où les racines ne sont pas situées, n demi-asymptotes de chacune des lignes $X=0$ et $Y=0$, et les branches correspondantes ne peuvent se couper nulle part ailleurs que dans les racines de l'équation ou de sa dérivée, points par l'un desquels doit passer chaque branche.

LEIDEN, novembre, 1883.

SUR LA

FILTRATION DES LIQUIDES À TRAVERS LES MEMBRANES FIBREUSES,

PAR

J. C. VAN BEEK.

Pour l'étude des relations entre le sang et les liquides qui dans le corps vivant, à l'état normal ou pathologique, traversent la paroi des vaisseaux, on doit, comme différents observateurs en ont déjà fait la remarque il y a longtemps, avoir égard tant à l'influence des différences de composition entre les liquides situés en dedans et en dehors des vaisseaux sanguins, qu'à l'influence des différences de tension entre le sang et le liquide extra-vasculaire. En d'autres termes, dans le passage de liquides à travers la paroi des vaisseaux sanguins, l'osmose et la filtration jouent toutes les deux un rôle. Pour apprendre à mieux connaître ces influences, on a étudié les phénomènes d'osmose et de filtration en dehors du corps animal. Dans ces expériences, on a nécessairement fait usage de membranes mortes. Or, lorsqu'il s'agit d'appliquer les résultats ainsi obtenus à l'organisme vivant, deux difficultés se présentent. En premier lieu, on peut se demander jusqu'à quel point les propriétés vitales des membranes considérées modifieront les phénomènes en question, et, en second lieu, on doit avoir la certitude que les membranes employées dans les expériences, — abstraction faite des propriétés vitales, — sont assimilables aux parois des vaisseaux sanguins.

Dans le présent travail, où je n'ai eu en vue que les phéno-

mènes de la filtration, je me suis proposé de rechercher si l'on a le droit de se servir des faits, trouvés à ce sujet en expérimentant avec différentes membranes, pour l'explication de phénomènes observés sur l'organisme vivant, à l'état de santé ou de maladie. Ce qui m'a surtout déterminé à entreprendre ce travail, ce sont les communications de M. Runeberg, qui, partant d'observations faites par lui sur la filtration de liquides albumineux à travers la paroi intestinale morte, en a tiré des conclusions relativement aux lois qui régissent la sécrétion d'albumine par les glomérules vasculaires des reins. Avec tout autant de raison on devrait appliquer ces observations aux vaisseaux capillaires en général, et, immédiatement après l'apparition du Mémoire de M. Runeberg, M. Cohnheim a déjà signalé, dans ses *Vorlesungen über Allgemeine Pathologie*, les grandes difficultés qu'une pareille application rencontrerait. Or, comme rien ne fait prévoir jusqu'ici que ces difficultés puissent être résolues, et que des doutes ont aussi été élevés, de divers côtés, sur l'exactitude des vues de M. Runeberg concernant la production de l'albuminurie, il m'a semblé qu'il y aurait quelque intérêt à étudier de nouveau les phénomènes de la filtration à travers les membranes mortes, et à examiner s'il ne serait pas possible de trouver pour ces phénomènes une explication satisfaisante. Si tel était le cas, on pourrait mieux juger jusqu'à quel point il est permis d'assimiler entre elles, sous le rapport de la filtration, les membranes fibreuses mortes et les parois vasculaires vivantes.

M. Runeberg [1]) trouva que lorsqu'un liquide passait par une paroi d'intestin, la rapidité de la filtration, à pression constante, décroissait graduellement. Quand le liquide contenait de l'albumine, la teneur en albumine de la portion filtrée du liquide était, dès le début de l'expérience, moindre que celle du liquide renfermé dans l'intestin; en outre, plus l'expérience se prolongeait, plus le produit de la filtration s'appauvrissait en albumine. En cas de pression variable, la proportion d'albumine diminuait à

1) *Archiv. d. Heilk.*, t. XVIII, p. 1.

mesure que la pression s'élevait. Si on laissait l'intestin se détendre pendant quelque temps, en abaissant la pression ou en la supprimant tout à fait, la perméabilité de la paroi intestinale, tant pour l'eau que pour l'albumine, se trouvait de nouveau augmentée. L'affaiblissement de la perméabilité sous l'influence de la pression ressortait avec une évidence toute particulière de la filtration d'une émulsion aqueuse de gomme-gutte; à pression élevée, la paroi intestinale ne fournissait qu'un liquide parfaitement limpide, tandis qu'à pression moindre elle se laissait traverser par les fines particules de résine.

Manifestement, c'est surtout sur cette dernière observation que M. Runeberg s'appuie dans ces considérations sur la production de l'albuminurie [1]). Il y défend la thèse que les parois vasculaires du glomérule doivent laisser filtrer plus d'albumine à basse qu'à haute pression, bien que, selon ses propres expressions, en dépit des oscillations que les variations de la pression déterminent dans la richesse en albumine du liquide filtré, la quantité absolue de l'albumine filtrée, dans un certain temps, reste sensiblement égale.

A ce résultat, que la vitesse de filtration sous pression constante diminue à mesure que l'expérience se prolonge, était déjà arrivé antérieurement M. Eckhard [2]), en opposition avec MM. W. Schmidt [3]), Liebig [4]), Heynsius [5]), etc. En filtrant de l'eau à travers le péricarde du veau ou du chien, la pression restant la même, il avait régulièrement trouvé que la filtration se ralentissait, et il avait montré que ce ralentissement ne pouvait dépendre d'un gonflement croissant de la membrane, ni d'une occlusion de plus en plus parfaite, due à l'imbibition croissante du lien qui fixait la membrane sur le verre contenant le liquide.

---

1) *Zeitschr. f. klin. Med.*, t. XXIII, p. 44.

2) *Beiträge zur Anatomie und Physiologie*, t. I, p. 97.

3) Poggendorff's *Annalen*, t. XCIX, p. 337.

4) *Untersuchungen über einige Ursachen der Säftebewegungen bei Pflanzen und Thieren*, 1848.

5) *Nederl. Tijdschr. v. Geneesk.*, 1857, p. 509.

En outre, il avait observé que la membrane redevient plus perméable au liquide lorsque, après avoir servi plus ou moins longtemps à la filtration, elle reste détendue pendant quelques heures. Mais M. Eckhard n'attache pas grande importance à ce fait. Car, dit-il, si l'on peut en déduire que durant l'absence de la charge l'effet de la pression précédemment exercée disparaît en partie, on peut tout aussi bien admettre que l'activité plus grande de la filtration, après la détente, est la conséquence de ce que quelques-unes des fibres de la membrane se déchirent lors du rétablissement brusque de la pression. Et cette dernière interprétation, croit-il, peut d'autant moins être taxée d'invraisemblance, qu'il a parfois trouvé la perméabilité, après la détente, plus grande même qu'elle ne l'était au début de l'expérience [1].

M. Eckhard n'essaie qu'incidemment d'expliquer la diminution de la perméabilité de la membrane au cours de la filtration. Il reconnaît qu'on peut être tenté d'admettre ici l'intervention d'une „réaction élastique",mais il juge que, pour le moment, „la recherche de nouvelles hypothèses, susceptibles ni de démonstration ni de réfutation, ne peut mener à rien dans cette étude."

L'assertion que la perméabilité de la membrane, diminuée sous l'influence de la filtration, se rétablirait par la détente, fut toutefois combattue par deux observateurs postérieurs.

M. Gottwalt [2], suivant le conseil de M. Hoppe Seyler, filtra du sérum sanguin à travers la paroi de l'uretère humain, et vérifia ainsi que la quantité du liquide filtré et sa richesse en albumine diminuent à mesure que l'expérience dure plus longtemps. Quant à une influence de la détente sur la perméabilité, il ne put la constater. Il trouva, en outre, que la proportion d'albumine du liquide filtré était, à la vérité, moindre que celle du sérum primitif, mais toujours d'autant plus grande que la pression avait été plus forte. A la fin de son Mémoire, il men-

1) C'est à tort que M. von Regéczy reproche à M. Runeberg de n'avoir pas compris, sur ce point, M. Eckhard.

2) *Zeitschr. f. physiol. Chemie*, t. IV, p. 423.

tionne encore une expérience faite par lui, sans toutefois en tirer aucune conclusion. Chez un chien qui venait d'être tué, il avait injecté du sérum sanguin dans l'artère rénale, après avoir lié à l'un des côtés la veine rénale et avoir introduit des tubes de verre dans les deux uretères. Il se passa trois heures avant que le sérum commençât à découler goutte à goutte de la veine rénale laissée ouverte; les bassinets des reins et les uretères restèrent complètement vides. — On peut douter, me semble-t-il, que des expériences de ce genre soient capables de jeter quelque jour sur la question qui nous occupe. Les recherches des dernières années ont suffisamment établi que précisément les parois des vénules et des capillaires changent très facilement de nature sous l'action d'influences nuisibles, et que ce changement s'accuse entre autres, avec une netteté spéciale, par la modification de la perméabilité. Les résultats d'expériences de filtration à travers les parois vasculaires d'un animal tué ne peuvent évidemment servir de base à un jugement sur la filtration durant la vie. En outre, le rein, dans lequel la sécrétion de liquide peut être modifiée à un si haut degré par la distension des vaisseaux et le gonflement des cellules épithéliales, ne paraît pas être l'organe le plus propre à de pareilles recherches.

Les objections de M. Gottwalt ne convainquirent pas M. Runeberg. Il répéta les expériences de filtration avec des uretères et d'autres membranes [1]), et trouva ses résultats antérieurs confirmés de tout point. L'influence de la détente se traduisit de nouveau par l'augmentation de la perméabilité. La quantité du liquide filtré était devenue plus grande sous la même pression, et il en était de même de la richesse en albumine. Pour expliquer les résultats différents obtenus par M. Gottwallt, M. Runeberg invoque l'irrégularité avec laquelle il faisait varier la pression dans ses expériences. „Lorsque", dit-il, „on conduit les expériences comme l'a fait M. Gottwalt, c'est-à-dire lorsque la pression est ordinairement changée d'heure en heure, sans aucun ordre déterminé,

---

[1]) *Zeitschr. f. physiol. Chemie* t. IV, p. 508.

cela seul suffit pour que les résultats soient tout à fait irréguliers". Après la détente, qui en général ne durait que deux heures, M. Gottwalt appliquait aussi, le plus souvent, une pression différente de celle qui avait été employée immédiatement avant la détente, — ce qui rendait impossible toute comparaison précise. Dans le petit nombre d'expériences où la pression était la même avant et après la détente, la filtration avait duré si peu de temps (tout au plus 6 heures ½; dans un cas, il est vrai, l'expérience avait duré 10 heures, mais aussi, 3 heures avant la fin, l'uretère avait déjà été détendu pendant 2 heures) que la perméabilité n'était encore à beaucoup près pas assez affaiblie pour rendre probable une indication nette de l'influence du repos.

Pour ces motifs, M. Runeberg continue, malgré la dénégation de M. Gottwalt, a regarder comme démontré que lorsque des solutions albumineuses sont filtrées, en dehors de l'organisme, à travers des membranes animales complexes, la perméabilité de ces membranes diminue à la suite d'un accroissement de pression, et, réciproquement, augmente sous l'influence d'un abaissement de la pression. Mais, ajoute-t-il, — et cette restriction constitue une différence notable avec ses énoncés antérieurs, — „cela ne veut pas dire que les choses se passent de la même manière, *pour les membranes impliquées*, *dans les filtrations qui s'accomplissent au sein de l'organisme vivant.*"

M. von Regéczy [1]) aussi attaque assez vivement M. Runeberg au sujet des conclusions que celui-ci a tirées de ses expériences. Il expose d'abord que dans les expériences de M. Runeberg la filtration est favorisée par la haute pression, — ce que d'ailleurs M. Runeberg lui-même avait reconnu assez explicitement en ces termes: „La vitesse de filtration s'élève et s'abaisse avec la pression". Ensuite, M. von Regéczy fait un calcul des quantités d'albumine qui, d'après les chiffres de M. Runeberg, ont filtré à haute et à basse pression. Mais, pour cela, il combine — et inexactement encore — d'une manière si arbitraire les chiffres

[1]) *Zeitschr. f. physiol. Chemie*, t. IV, p. 508.

d'expériences différentes, que l'argumentation en perd beaucoup de sa force. Je n'en citerai qu'un exemple. Pour montrer combien les résultats de ses expériences étaient irréguliers avant qu'il y eût suffisamment tenu compte de l'influence exercée sur la perméabilité de la membrane par la durée de la filtration et par la pression appliquée, M. Runeberg donne le tableau (n°.1) suivant [1]):

Pression en centim. d'eau.	Durée de la filtration, en heures.	Quantité absolue du liquide filtré.	Quantité de liq. filtré par heure et par cmq., en milligr.	
11	4	30	56	Appareil n°. 1.
11	4	30	56	
11	4	19	35	
11	4	23	43	Appareil n°. 2.
22	4	46	85	
23	4	32	59	

La membrane employée dans ces expériences était un intestin de lapin, à l'état frais; le liquide soumis à la filtration était une solution d'albumine d'œuf séchée, préalablement filtrée sur du papier. La teneur en albumine de la solution était de 6°/₀.

Plus loin [2]), à propos de la composition du produit de la filtration, M. Runeberg consigne, dans son tableau 18, qu'une solution à 6°/₀ d'albumine d'œuf séchée a fourni par la filtration à travers un intestin frais de lapin, sous une pression de 2—11 cm, un liquide contenant 91,5°/₀ de la proportion d'albumine de la solution primitive, et, sous une pression de 20—30 cm, un liquide contenant 89,5°/₀ de cette proportion. Il n'est pas mentionné si ces chiffres se rapportent à la même expérience qu'on trouve inscrite dans le tableau 1. En tout cas, les différences des indications de la pression défendent, en l'absence de renseignements plus précis, de combiner directement entre eux les

[1]) *Archiv. der Heilk.*, Jahrg. XVIII, p. 14.
[2]) *l.c.*, p.39.

données des deux tableaux. Pourtant, M. von Regéczy [1]) déduit de ces chiffres que, dans le tableau 1, avec une solution à 10°/₀, il a transsudé, sous une pression moindre, 1^{gr},54 d'albumine, sous une pression plus forte, 2,^{gr}09; — en combien de temps, c'est ce qu'il ne dit pas.

Par de pareils calculs, ni très clairs ni très exacts, M. von Regéczy arrive à cette conclusion, — à laquelle M. Heidenhain était déjà parvenu avant lui d'une manière plus simple et plus probante, — qu'en cas de pression plus élevée la filtration de l'albumine s'accélère, mais moins fortement que la filtration de l'eau. Cela ne suffit pas, toutefois, pour autoriser M. von Regéczy à qualifier cet énoncé de M. Runeberg, „la membrane perd de sa perméabilité sous l'influence de la pression", d'„assertion qui manque de tout fondement, ainsi que j'aurai l'occasion de le montrer dans la suite" [2]).

Plus loin, je devrai revenir sur les expériences de M. von Regéczy et sur les conclusions qu'il en déduit. Ici, je puis donc être bref. Il a régulièrement observé une diminution de la vitesse de filtration à mesure que l'expérience se prolongeait. Mais, au lieu d'en „conclure erronément", comme M. Runeberg, que la pression continue rend la membrane moins perméable, M. von Regéczy pense que les pores de la membrane se sont obstrués peu à peu. Le fait se produisait aussi, il est vrai, lorsque le liquide soumis à la filtration ne contenait pas de particules pouvant se loger dans les pores de la membrane, mais alors, suivant lui, il y avait lieu de supposer que des particules se détachaient de la membrane elle-même et restaient engagées dans les pores. — L'augmentation de la perméabilité sous l'influence de la détente est niée par M. von Regéczy.

Ce dernier point a évidemment une grande importance pour l'explication de la diminution que la vitesse de filtration éprouve sous l'influence de la durée de l'expérience. La cause à laquelle M. von Regéczy attribue cette diminution, savoir, l'obstruction

1) *l.c.*, p. 55.
2) *l.c.*, p. 546.

des pores de la membrane, ne peut que très difficilement se concilier avec l'effet de la détente, observé par M Eckhard et par M. Runeberg. Sur cet effet devait donc se porter en premier lieu mon attention dans l'étude de la question concernant la cause des changements de perméabilité de la membrane employée pour la filtration. Je n'ai pas tardé à reconnaître ainsi l'impossibilité de me rallier à l'explication proposée par M. von Regéczy.

Pour commencer, je répétai les expériences de M. Runeberg, en procédant presque exactement comme l'indique la figure jointe à la dernière communication de cet auteur [1]). Du sérum de sang de bœuf ou de cheval fut filtré à travers un bout d'intestin de mouton, qui avait été conservé quelque temps dans l'alcool faible, puis bien lavé à l'eau. On réglait la pression en élevant ou abaissant le vase à pression, relié à l'intestin par un tube de caoutchouc; la pression était mesurée au moyen d'un manomètre uni latéralement au tube de caoutchouc et placé de façon que, dans la branche tournée vers l'intestin, le niveau du mercure se trouvât à la hauteur de l'axe de l'intestin.

Une détermination rigoureusement exacte de la pression dans l'intestin n'était pas possible, parce que l'axe de l'intestin, lorsque celui-ci était tendu par le liquide, ne formait jamais une ligne droite; elle n'était d'ailleurs pas nécessaire, puisque, aux pressions sous lesquelles j'opérais, une différence de un ou tout au plus deux millimètres de mercure n'avait aucune importance. À la partie la plus basse de la paroi inférieure du tube de verre qui entourait l'intestin se trouvait une ouverture, par laquelle le liquide filtré s'écoulait goutte à goutte dans un vase placé au-dessous. A intervalles fixes, on mesurait la quantité du liquide filtré. La proportion des matières solides, tant du sérum employé à l'expérience que du produit de la filtration, était chaque fois déterminée par l'évaporation dans des capsules de platine tarées et la dessiccation ultérieure à 120° C. Comme il est suffisamment établi que les différences dans la proportion de matières

---

1) *Zeitschr. f. physiol. Chemie*, t. VI, p. 598.

solides entre le sérum et le liquide filtré, ou entre les divers produits de la filtration, dépendent presque entièrement de différences dans la proportion d'albumine, j'ai cru pouvoir me dispenser du dosage, plus laborieux, de l'albumine. Durant la filtration, le liquide était en repos dans l'intestin. Seulement, d'heure en heure on débouchait pendant quelques instants l'orifice d'écoulement, pour renouveler le sérum, concentré par la filtration. La légère détente qui en résultait pour l'intestin ne pouvait, vu sa durée extrêmement courte (une demi-minute tout au plus), nuire à l'expérience.

Dans le tableau ci-dessous les résultats de cinq expériences,

Durée de la filtration sous la même pression.	Pression en mm. Hg.	Quantité du liquide filtré par heure en CC.	Matière solide en °/₀.	Matière solide par heure en grammes.	Matière solide du sérum.
No. 1) 9 heures.	65	17-4.5(17-4)	7·252	1.106 début	
6 "	40	3.5-4 75(5-3.5)	7.390	0.347 tout	9.038°/₀.
19 "	79	7.5-2.75(7.5-2.5)	5.520	0.351 début	
No. 2) 22 heures.	40	19.5-3.3(19.5-3.3)	8.024	1.424 début	
			7.540	0.294 fin	
24 "	60	6.5-3.4(9-3.5)	7.620	0.762 début	
			7.352	0.242 fin	8.992°/₀.
24 "	40	1.75-1.5(2.75-1.4)	7.606	0.167 début	
			7.360	0.096 fin	
8½ "	60	2.75-3.5(4-3.5)	7.528	0.256 tout	
No. 3) 20 heures.	40	10-2.75(10-2.75)	5.880	0.456 début	
			4.584	0.138 fin	
6 "	60	4-5(4-5)	3.704	0.176 tout	
18 "	80	6.5-2.5(6.5-2.5)	3.424	0.178 début	9.392°/₀.
			2.786	0.070 fin	
8 "	40	1.5-2.25(2.5-1.5)	4.700	0.100 tout	
6 "	80	3.5-1.25(3.5-1.25)	3.220	0.081 "	
No. 4) 20 heures.	80	17.5-4.5(20.5-4.5)	9.334	1.680 début	
			6.700	0.295 fin	
24 "	40	1.5-1.25(4-1.25)	7.324	0.220 début	10.656°/₀.
			7.335	0.104 fin	
24 "	80	3.5-2 5(5-2.5)	4.440	0.128 tout	
No. 5) 18 heures.	60	18.5-6.5(18.5-5)	8.400	1.207 début	
			7.164	0.412 fin	
24 "	20	4.25-2(4.5-1.5)	8.068	0.328 début	9.844°/₀.
			7.455	0.124 fin	
23 "	60	5-1.5(5-1.5)	6.048	0.252 début	
			4.884	0.081 fin	

exécutées comme il vient d'être dit, sont résumés aussi succinctement que possible. La filtration était continuée jour et nuit. Pendant le jour, le produit était mesuré chaque heure; de ce qui avait filtré pendant la nuit, la moyenne horaire se déduisait par le calcul.

Dans la troisième colonne, la quantité du liquide filtré par heure est donnée pour la première et pour la dernière heure de chaque période. Les chiffres placés, dans cette même colonne, entre parenthèses font connaître la plus grande et la plus petite quantité qui a filtré, en une heure, dans chaque période. Dans la quatrième colonne, les mots „début", „fin" et „tout" indiquent si la détermination de la proportion des matières solides a été effectuée sur le produit recueilli au début, à la fin ou pendant la durée totale de la période.

Il ressort de ces chiffres que, l'abaissement de la pression fait augmenter la perméabilité de la membrane, tant pour l'eau, que pour l'albumine. Si alors la haute pression antérieure est rétablie, il filtre plus de liquide et ce liquide est plus riche en albumine que cela n'eût été le cas si la détente temporaire n'avait pas eu lieu. A la vérité, la quantité du liquide filtré et sa teneur en matières solides ne sont pas toujours, d'une manière absolue, plus grandes qu'à la fin de la précédente période de haute pression; mais cela s'explique aisément si l'on considère que la pression a été seulement abaissée, non supprimée. La filtration indéfiniment continuée occasionne par elle-même une diminution de la perméabilité de la membrane; pour que l'influence de la détente soit mise en évidence, il suffit donc que le ralentissement de la filtration ne se produise pas. Sous un autre rapport encore mes résultats s'accordent avec ceux de M. Runeberg. Dès que l'expérience a duré quelques heures, la proportion d'albumine du liquide filtré est plus forte à basse qu'à haute pression. Par contre, la quantité absolue d'albumine filtrée par heure est plus grande à haute qu'à basse pression. Ainsi se trouve complètement confirmée cette conclusion de M. Heidenhain, déduite des expériences de M. Runeberg lui-même: „Lorsque des solutions albumineuses filtrent à travers des mem-

branes animales, il passe, en cas de pression croissante, à la fois plus d'albumine et plus d'eau. Le courant d'albumine augmente toutefois plus lentement que le courant d'eau, de sorte que la proportion centésimale d'albumine, dans le liquide filtré, diminue à mesure que la pression s'élève". [1]) Nous n'avons pas à nous occuper ici de la signification de ce fait. Je noterai seulement que M. Runeberg ne reste pas toujours, à cet égard, bien conséquent à lui-même. Lorsqu'il dit: „On constate effectivement ce phénomène, important pour la physiologie, que la quantité absolue de l'albumine filtrée reste sensiblement la même à tous les degrés de pression [2])", cette assertion se concilie mal avec les considérations ultérieures par lesquelles il cherche à montrer que, au moins en beaucoup de cas, de l'albuminurie se produirait durant un abaissement de la pression sanguine dans les glomérules. Dans sa dernière communication, toutefois, M. Runeberg reconnaît la valeur de quelques-unes des objections (il ne dit pas lesquelles) élevées contre son opinion, et il exprime la conviction „que la chose ne peut que gagner en clarté à ce que cette discussion soit provisoirement suspendue" [3]).

Pour étudier de plus près la signification du décroissement de la perméabilité de la membrane sous l'influence d'une pression continue, et de son accroissement sous l'influence de la détente, de nouvelles expériences furent faites dans les conditions les plus simples. Au lieu de sérum sanguin, je filtrai par une paroi d'intestin une solution de sel marin à 5°/$_0$. Le résultat fut net. Par exemple: la quantité de liquide filtré, obtenue sous une pression constante de 20 mm Hg, s'abaissa en 48 heures de 225 cc à 57 cc par heure; l'intestin ayant alors été détendu pendant 6 heures, le produit de la filtration s'éleva, dans la première heure après le rétablissement de la pression, à 59 cc,

---

1) *Archiv der Heilkunde*, Jahrg. XVIII, p. 42.
2) Hermann, *Handbuch der Physiologie*, t. V, 1e part., p. 369.
3) *Zeitschr. f. physiol. Chemie*, t. VI, p. 527.

dans la seconde heure à 62 cc, pour recommencer ensuite à décroître progressivement.

Pour simplifier encore davantage, de l'eau distillée fut filtrée à travers du papier-parchemin, de la manière suivante. Un morceau de papier-parchemin humide fut recourbé en enveloppe lâche sur le pavillon d'un entonnoir et solidement lié près du col, de façon que le papier formait autour de l'entonnoir une large poche. Cette poche fut remplie d'eau distillée, qu'on introduisait par le bec de l'entonnoir. Lors de cette opération, l'air contenu dans la cavité de l'entonnoir pouvait s'échapper, mais celui qui se trouvait entre la surface extérieure du verre et le papier n'avait aucune issue. Il y était emprisonné entre l'eau affluente et le lien qui serrait le papier sur le col de l'entonnoir. Le bec de celui-ci fut ensuite relié, au moyen d'un tube de caoutchouc, à un vase à pression rempli d'eau distillée. Le tube de caoutchouc communiquait latéralement avec un manomètre, placé de telle sorte que le niveau du mercure, dans la branche tournée vers le tube, se trouvait à la hauteur du fond de la poche de papier. Sous l'influence de la pression, la poche était distendue et l'eau chassée à travers le papier. Cette eau était reçue dans un verre et mesurée d'heure en heure.

L'expérience ainsi disposée pouvait présenter deux sources d'erreurs. En premier lieu, il était possible que la poche ne fût pas hermétiquement fermée par la ligature. Dans ce cas, l'air trouvait une issue au côté extérieur de l'entonnoir. Si l'air se maintenait au-dessous de la ligature, on pouvait en déduire avec probabilité que l'occlusion était complète. Avec probabilité, mais non avec certitude. Car, le papier étant fortement plissé au voisinage de la ligature et ayant été humide dès l'origine, il se pouvait que les fissures capillaires des plis laissassent passer de l'eau, mais non de l'air. Dans ce cas, le papier devait rester toujours humide près de la ligature. Lorsque cela arrivait, l'expérience était regardée comme manquée. Le plus souvent, toutefois, on réussissait à si bien serrer la poche, que le papier, au-dessus du niveau du liquide, au côté extérieur de l'entonnoir,

était, quelques heures après le commencement de l'expérience, parfaitement sec, et que l'air restait emprisonné dans la poche, sous la ligature. Alors, naturellement, il ne pouvait être question d'un suintement d'eau par-dessous la ligature.

Une seconde source d'erreurs pouvait provenir de l'existence de petits trous dans le papier-parchemin ou de déchirures faites en le liant; au lieu de passer seulement entre les fibres du papier, l'eau serait alors expulsée aussi par des ouvertures grossières. Une pareille ouverture, toutefois, s'élargirait de plus en plus sous l'action continue de la pression, et à coup sûr ne se rétrécirait pas. Aussi, lorsque la filtration à pression constante s'accélérait progressivement au lieu de se ralentir, on pouvait être certain que la poche présentait une fuite. Si, dans ces conditions, l'expérience était continuée, l'eau dégouttait de plus en plus rapidement, et il finissait par se produire une déchirure bien visible, par laquelle l'eau s'écoulait en filet. Mais lorsque la quantité du liquide filtré diminuait d'heure en heure, on pouvait hardiment conclure à l'absence de fuites dans la poche. Il n'était pas à craindre que l'influence de l'évaporation du liquide occasionnât quelque trouble notable, vu que la surface filtrante du papier restait toujours humide et toujours la même tant que la pression était constante, tandis que la température de la chambre (les expériences eurent lieu au printemps) n'éprouvait pas d'oscillations marquées.

Un peu au-dessus et à côté du vase à pression était placé un grand flacon de Woulf, rempli d'eau. L'une des ouvertures du flacon était fermée hermétiquement; à travers les bouchons des deux autres passaient des tubes en U, qui débouchaient tous les deux dans le vase à pression. L'un de ces tubes, qui descendait jusqu'au fond du flacon, fonctionnait comme siphon et amenait l'eau du flacon dans le vase à pression; l'autre tube débouchait au haut du flacon et servait à y laisser pénétrer de l'air à mesure que l'eau s'écoulait par le siphon. Dès que l'eau, dans le vase à pression, s'élevait assez haut pour fermer l'ouverture de ce dernier tube, le fonctionnement du siphon

cessait, pour recommencer aussitôt que l'air extérieur trouvait de nouveau accès au flacon. De cette manière le niveau du liquide restait jour et nuit le même dans le vase à pression.

Dans ces conditions de pression invariable, il arrivait toujours que la quantité du liquide filtré par heure diminuait avec une vitesse décroissante, jusqu'à ce qu'enfin elle se montrât à peu près constante. Ce point atteint, le petit tube latéral était détaché du manomètre, après que le tube adducteur venant du vase à pression avait été fermé. En repliant alors vers le bas le premier de ces tubes, on vidait autant que possible la poche, qui par suite était détendue. Pour que l'état d'imbibition du papier-parchemin restât le même, on entourait la poche d'un large verre plein d'eau, sans toucher à la poche elle-même et sans rien changer à sa position. Au bout de quelques heures, le petit tube latéral était de nouveau relié au manomètre, le verre plein d'eau était retiré de dessous la poche, le robinet du vase à pression était ouvert, et la filtration recommençait. Sans exception, il passait alors plus d'eau que dans les dernières heures avant la détente, parfois même plus qu'au commencement de l'expérience. Quant à la cause de ce dernier phénomène, rien ne peut être affirmé, mais il est certain que des ouvertures grossières, — des déchirures, — ne s'étaient pas formées dans ces cas [1]). Bientôt, en effet, la quantité du liquide filtré se mettait à diminuer,

1) M. Eckhard, qui le premier a observé ce phénomène, présume qu'il doit être attribué au déchirement d'une partie des fibres de la membrane lors du rétablissement subit de la pression. Cette présomption paraît assez fondée. Seulement, il ne faut pas se figurer un déchirement qui perce toute l'épaisseur de la membrane. — Peut-être l'accroissement continu de la filtration, observé par différents expérimentateurs antérieurs, s'explique-t-il aussi par le déchirement de quelques fibres. Une fois, la pression restant constante et rien n'étant changé à l'appareil, j'ai vu la vitesse de filtration s'accroître brusquement à plusieurs reprises. Après l'accroissement survenait de nouveau, peu à peu, une diminution, suivie à son tour d'une nouvelle augmentation, et ainsi de suite. Finalement, — au bout de trois jours, — le papier se déchira.

pour angmenter de nouveau après une détente ultérieure. Parfois, il est vrai, une fuite se produisait dans la poche détendue puis soumise à une nouvelle extension, mais alors la filtration s'accélérait de plus en plus, jusqu'à ce que, après un certain temps, une déchirure manifeste apparût. L'effet de la détente diminuait à mesure que celle-ci avait eu moins de durée, et à mesure que la membrane avait été plus longtemps dans un état de forte tension.

Les représentations graphiques des résultats obtenus dans quelques-unes de mes expériences (voir Pl. IX) font ressortir, mieux que ne pourraient le faire de longues séries de chiffres, les phénomènes dont il vient d'être question. Je puis donc souscrire sans réserve à l'assertion de M. Runeberg „que la membrane servant à la filtration devient à la longue, sous l'influence de la pression, moins perméable, mais qu'elle reprend de la perméabilité lorsqu'elle est déchargée de cette pression". La filtration du sérum sanguin, à travers du papier-parchemin et des uretères de lapin, m'a donné les mêmes résultats.

Si M. Gottwalt est arrivé à conclure que „ni la diminution de la pression, ni sa suppression complète durant plusieurs heures, n'est capable de relever la perméabilité affaiblie", il faut l'attribuer sans doute à ce que, dans ses expériences, il faisait varier la pression — et cela ordinairement à courts intervalles — avec une extrême irrégularité, circonstance sur laquelle M. Runeberg et M. von Regéczy ont déjà attiré l'attention.

De même que M. Gottwalt, M. von Regéczy déduit de ses expériences que le repos de la membrane n'exerce pas d'influence appréciable sur sa perméabilité. „Lorsque", dit-il [1]), „je plaçais la membrane, sans pression, dans la solution saline, et que je l'y laissais pendant un temps assez long pour que la restauration de l'état normal d'élasticité eût pu se produire, c'est à peine si

1) *l. c.*, p. 580. A la page suivante, M. v. R. s'exprime ainsi: „lorsque j'introduisais la membrane, sans pression, dans la solution à filtrer et que je l'y laissais se reposer, aucun accroissement ne s'observait dans l'expérience suivante".

un accroissement avait lieu". Si faible que cet accroissement de la filtration sous l'influence de la détente soit jugé par M. von Regéczy, il n'en existait pas moins dans la plupart de ses expériences. Parfois la quantité du liquide filtré était, après le repos, le double de ce qui avait été recueilli antérieurement, dans le même espace de temps; une fois même, elle fut plus du septuple! (expérience X). Mais, quand même l'augmentation serait en général aussi insignifiante que M. von R. le dit, elle n'en devrait pas moins être regardée comme un argument contre son opinion. Car il défend, comme nous l'avons vu, la thèse que la diminution de la perméabilité, sous l'influence d'une filtration prolongée, est imputable à l'obstruction des pores de la membrane, soit par des particules solides provenant du liquide filtrant, soit par des fibrilles que l'action du liquide aurait détachées de la membrane. Pour expliquer, dans cette manière de voir, l'accélération du passage du liquide après la détente, on ne pourrait avoir recours, me semble-t-il, qu'à l'hypothèse, certainement très improbable, de l'expulsion des particules obstruantes, en suite des changements que la membrane subit lors de la détente et de la nouvelle tension subséquente. Et même cette hypothèse, M. von Regéczy ne pourrait l'admettre, vu que l'influence du repos s'est aussi manifestée dans une couple d'expériences où il se servait d'un filtre de papier ajusté dans un entonnoir, disposition qui excluait, suivant lui, tout changement de forme.

Que la cause du ralentissement de la filtration sous pression constante n'est pas à chercher dans l'obstruction des pores de la membrane par des particules solides suspendues dans le liquide, c'est ce que mes expériences me paraissent mettre hors de doute. Pour juger si l'eau distillée que je filtrais à travers le papier-parchemin contenait ou non des particules solides, je me procurai un tube de verre de un mètre de long, du modèle de ceux dont on se sert dans les recherches au polaristrobomètre. Ce tube étant rempli de l'eau à examiner, puis fermé, on le dirigeait horizontalement vers la clarté du jour. Devant l'extrémité tournée vers la lumière, un aide tendait alternativement un ou deux fils

noirs, chacun d'un diamètre d'environ un demi-millimètre. Lorsque des particules solides flottaient dans l'eau, il était impossible, à cause de la dispersion intérieure, de reconnaître, en regardant par le tube, si un seul fil était tendu devant lui, ou s'il y en avait deux. Quand, au contraire, les fils étaient nettement visibles à travers la couche d'eau épaisse d'un mètre, on pouvait admettre que cette eau ne tenait pas en suspension des particules capables d'obstruer les pores du papier-parchemin. Or, avec une pareille eau, à travers laquelle, sous cette épaisseur considérable, les objets étaient vus aussi distinctement qu'à travers l'air, j'obtins exactement les mêmes résultats qu'avec l'eau dont la limpidité n'avait pas fait l'objet d'un examen spécial. Le papier-parchemin qui devait servir à l'expérience, le vase à pression et le tube par lequel celui-ci était relié à l'entonnoir furent soigneusement lavés avec la même eau, puis la filtration fut étudiée de la manière ci-dessus décrite. La courbe IV représente les résultats d'une expérience ainsi faite avec de l'eau parfaitement limpide. On voit que, tout comme dans les autres expériences, la perméabilité s'abaisse à mesure que la filtration continue, pour se relever, — et même, dans le cas présent, jusqu'à une hauteur plus grande qu'au début de l'expérience, — après que la membrane a été détendue pendant quelques heures.

Par là, il est vrai, ne se trouve pas encore démontrée la fausseté de cette autre assertion, que la membrane serait obstruée par des fibrilles détachées de la membrane elle-même, sous l'action du liquide. Mais on est en droit de demander, me semble-t-il, si ce n'est pas plutôt d'une pareille assertion que la preuve doit être exigée. M. von Regéczy, en effet, ne l'a imaginée que pour pouvoir maintenir, vis-à-vis de faits gênants, son opinion que le ralentissement de la filtration serait dû à l'obstruction. En rapportant le fait que, lorsque de l'eau distillée est filtrée sur du papier à filtre, la quantité du liquide transmis diminue continûment, il dit: „On ne peut guère songer à un degré différent d'imbibition, car il est probable que, dès sa première humectation, le papier à filtre a atteint le maxi-

mum de son gonflement; d'un autre côté, l'eau distillée ne tient pas en suspension des particules qui puissent beaucoup rétrécir, ou même boucher, les pores de la membrane; la seule possibilité qui reste est donc que les particules désagrégées ou relâchées de la matière de la membrane elle-même contribuent à oblitérer les voies qui servent à la filtration" [1]).

En égard à l'influence de la détente sur la perméabilité de la membrane, — si nettement constatée d'abord par M. Eckhard, puis par M. Runeberg, puis aussi, au témoignage de ses propres chiffres, par M. von Regéczy, et enfin par moi, — deux hypothèses ne reposant sur aucun fondement, à savoir, 1° que des fibrilles détachées de la membrane boucheraient les pores et 2° que ces fibrilles seraient expulsées lors de la détente et de l'extension ultérieure de la membrane, devraient donc être invoquées, pour rendre acceptable l'interprétation de M. von Regéczy. Il y aurait là de quoi embarrasser, si les raisons données par M. von Regéczy à l'appui de son opinion devaient être jugées irréfutables. Mais tel n'est pas le cas, à ce qu'il me semble.

M. von Regéczy tâche de démontrer deux points: 1° que le ralentissement de la filtration à pression constante *ne peut pas* être attribué à un changement de forme de la membrane, occasionné par la pression, et 2° qu'il *doit* être imputé à l'obstruction des pores. Comme preuve de la première proposition il allègue seulement que la filtration se ralentit peu à peu même quand de l'eau distillée passe par un filtre ordinaire, étroitement appliqué contre les parois de l'entonnoir. „Lorsque", dit-il, „un liquide est versé dans l'entonnoir, les côtés du papier à filtre ne peuvent pas être tendus, et par suite l'impossibilité d'un changement de forme garantit l'impossibilité de tout changement d'élasticité" [2]). L'expression „changement d'élasticité", évidemment employée sous l'impression de l'opinion énoncée par M. Eckhard et par M. Runeberg, à savoir, que l'augmentation de perméabilité sous l'influence de la détente devra probablement être expliquée

[1]) *l.c.*, p.561.
[2]) *l.c.*, p.564.

par l'action de forces élastiques, cette expression est certainement assez mal choisie. Toutefois, l'intention de M. von Regéczy est claire: le ralentissement graduel de la filtration ne peut être dû à l'action directe de la pression de l'eau sur le papier du filtre. Mais cette assertion soulève, à mon avis, de sérieuses objections. La pression de l'eau contenue dans le filtre adapte celui-ci aussi exactement que possible aux parois de l'entonnoir. Lorsque la pression est forte, l'espace capillaire compris entre le verre et le papier peut devenir tellement étroit que le liquide ne s'y meut plus, — sauf là où se trouve le pli du filtre (celui-ci était plié en quatre dans les expériences de M. von Regéczy). A cette place il y aura, au moins initialement, une large fente, le long de laquelle l'eau pourra s'écouler. Mais, par suite de la distension du papier, cette fente se rétrécira peu à peu, de sorte que la résistance à la transmission du liquide augmentera — et que la filtration s'opérera plus lentement. Si le papier est très flexible et très extensible, cette fente deviendra peut-être tellement étroite que la pression du liquide dans le filtre ne suffira plus pour faire couler l'eau par la fente. Alors la filtration ne pourra plus s'effectuer que par la pointe du filtre, qui fait librement saillie dans le col de l'entonnoir. Il n'est pas probable que dans les expériences de M. von Regéczy le contact entre le papier et l'entonnoir ait été si parfait. A travers un filtre quadruple il passait encore, après que l'expérience avait déjà duré 2½ heures, 93,5 cc d'eau en 5 minutes, tandis qu'au commencement de l'expérience la vitesse de filtration était de 106,4 cc en 5 minutes. Quand le papier ne s'applique pas partout exactement, il reste çà et là des fentes plus ou moins larges entre le filtre et l'entonnoir, et c'est là que la filtration aura principalement lieu. Mais, si en ces points les plis du papier persistent, cela n'empêche nullement que sa forme n'éprouve un changement interne. L'eau traverse le papier par un très grand nombre de canaux étroits, irréguliers, anastomosés entre eux, où elle a une grande résistance à vaincre. Par suite, la pression du liquide, à l'intérieur du papier, diminue très fortement de dedans en dehors. La face intérieure

du papier étant ainsi soumise à une pression plus forte que celle qui s'excerce entre ses fibres, et la face extérieure conservant sa position, — car le pli persiste, — le papier sera comprimé et le système des canaux servant à la filtration se rétrécira donc peu à peu. Ce rétrécissement sera le plus considérable dans les couches extérieures du papier, où la pression est le plus faible, mais il ne fera pourtant pas entièrement défaut au côté interne du papier, vu que, là même, la pression de l'eau qui circule entre les fibres et tend à les éloigner l'une de l'autre est moindre que la pression de l'eau contenue dans le filtre, par laquelle les fibres sont pressées les unes sur les autres. Le resserrement des pores du papier entravera naturellement de plus en plus la filtration, et le décroissement de la perméabilité sous l'influence d'une pression constante est donc un résultat direct de cette pression elle-même. Par là se trouve suffisamment réfutée, me semble-t-il, la première proposition de M. von Regéczy.

Et maintenant la seconde. Voici, en substance, comment l'auteur cherche à l'établir. Lorsqu'une forte solution de sel est filtrée, sous pression constante, à travers du papier à filtre, un intestin de porc, une pellicule d'œuf ou une vessie de poisson, la quantité du produit obtenu diminue successivement. Lave-t-on alors le filtre, sans le laisser reposer, à l'eau distillée, sous la même pression ou sous une pression encore plus grande, on trouve que la quantité d'eau transmise dans les premières minutes surpasse la quantité de solution saline qui, un instant auparavant, passait par le filtre dans un temps égal. Si ensuite, au bout de quelque temps, l'eau est de nouveau remplacée par la solution de sel, la filtration se fait également avec plus de rapidité que cela n'était le cas dans les dernières minutes avant le lavage. En outre, une forte solution de sel, à pression égale, filtre plus rapidement par une membrane lorsque celle-ci est préalablement imbibée d'eau que lorsqu'elle est déjà imprégnée de solution saline. Or, suivant M. von Regéczy, la seule explication possible de ces phénomènes est d'admettre que les pores d'un filtre traversé par une solution saline sont obstrués par le

sel, et que l'eau enlève ces particules obstruantes. „*Wenn wir bedenken dass in den Lösungen zertheilte Partikelchen von festen Körpern sich befinden, und diese aller Wahrscheinlichkeit nach Moleküle von grösserer Anziehungskraft besitzen als die Flüssigkeit — so dürfcn wir annehmen, dass diese die Poren der Membran, resp. des Papiers, viel eher werden verengern können als das reine Wasser durch Aufquellung der Membran oder des Papiers*".

Cette supposition, qui ne repose sur rien, et qui est en opposition complète avec le fait signalé il y a longtemps par M. Brücke, à savoir que, dans une membrane imbibée d'une solution saline, la partie du liquide la plus difficile à enlever, et qui par conséquent adhère le plus fortement aux fibres de la membrane, est beaucoup moins riche en sel que la solution primitive, — cette supposition tout à fait arbitraire doit servir de preuve unique à l'hypothèse de l'obstruction. Si l'on réfléchit, en outre, que des courants osmotiques doivent se produire quand de l'eau distillée est filtrée à travers une membrane imprégnée d'une solution saline concentrée, courants qui excerceront nécessairement une influence considérable sur le résultat de la filtration, et si l'on remarque, enfin, que la vitesse de filtration doit dépendre aussi, chez des liquides différents, de la mobilité différente des molécules, — on sera en droit de conclure, me semble-t-il, que M. von Regéczy n'a pas non plus démontré, ni même rendu probable, sa seconde proposition.

Les variations de la perméabilité des membranes se laissent, au contraire, très bien expliquer par les changements de forme que détermine la pression, changements qui, comme nous l'avons vu, n'étaient pas évités non plus dans les expériences de M. von Regéczy, avec du papier à filtre. Il y a accord parfait entre l'affaiblissement de la perméabilité à pression constante et son rétablissement dès que la membrane est soustraite pendant quelque temps à l'influence de la pression. Pendant le repos, en effet, l'action des forces élastiques restituera à la membrane, en tout ou en partie, sa forme primitive, — et cela d'autant moins complètement que le repos aura été de plus courte durée et que,

antérieurement, la membrane sera restée exposée plus longtemps à la pression. C'est dans cette mesure, effectivement, que nous avons trouvé une valeur moindre pour l'augmentation de la perméabilité par le repos.

En ce qui concerne la manière dont le changement de forme peut entraver la filtration, M. Eckhard seul a émis une conjecture, à savoir qu'il y aurait dans la membrane des pores ne servant pas à la filtration et qui, sous l'influence d'une pression continue, s'élargiraient tellement qu'il en résulterait une réduction graduelle du diamètre des canaux voisins, par lesquels la filtration a lieu. Il me semble qu'on ne pourrait guère avoir en vue ici que le gonflement, par imbibition, des fibres de la membrane. Pourtant, telle n'a pas été la pensée de M. Eckhard, car il remarque lui-même que la diminution de la perméabilité se produisait aussi lorsque, avant le commencement de l'expérience, la membrane avait déjà été imbibée pendant quelque temps du liquide à filtrer. Comment il faut alors se représenter ces pores dilatables par la pression et ne servant pas à la filtration, c'est ce que le Mémoire de M. Eckhard ne nous apprend pas.

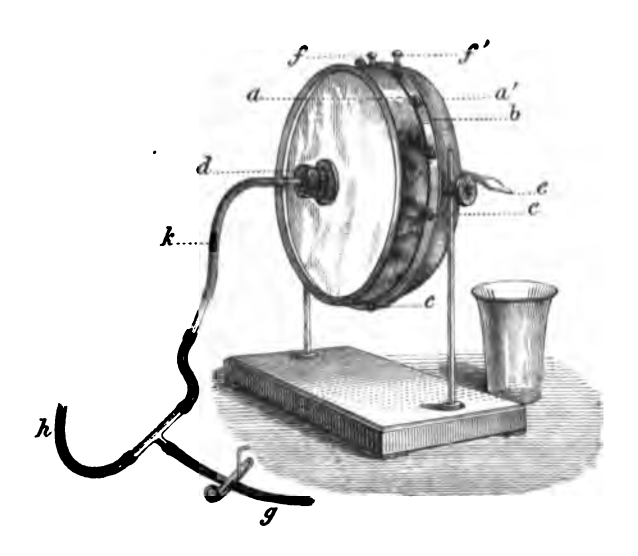
En parlant des expériences de M. von Regéczy, j'ai toutefois déjà noté que le papier à filtre, soumis à la pression, doit être comprimé et par conséquent rendu plus dense. Cela s'applique aussi à une membrane fibreuse quelconque, employée pour la filtration. Une fois que la distension de la membrane a atteint son maximum, ce qui pour les membranes dont il s'agit ici est promptement le cas, les fibres situées le plus en dehors sont tendues de manière à ne plus pouvoir bouger. La pression du liquide dans l'épaisseur de la membrane, pression par laquelle les fibres sont repoussées entre elles, diminue très rapidement de dedans en dehors, à cause de la grande résistance que le liquide rencontre dans le système d'étroits canaux qu'il doit parcourir. Sous l'influence de la pression exercée à l'intérieur de la poche ou de l'intestin, la membrane sera donc comprimée, de sorte qu'elle opposera à la filtration une résistance de plus en plus

grande. Le rétrécissement des pores, ainsi produit, fait également comprendre pourquoi, quand la pression croît, la filtration de l'eau augmente plus fortement que celle de l'albumine, matière dont les molécules sont beaucoup plus volumineuses, et pourquoi, dans les expériences de M. Runeberg, une émulsion de gommegutte traversait une paroi d'intestin sous une pression basse, mais non sous une pression élevée. A mesure que s'élève la pression, augmente, il est vrai, la force impulsive du liquide filtrant, mais augmente aussi, — surtout dans les couches externes de la membrane, — le rétrécissement du système de canaux à travers lequel ce liquide doit se frayer un chemin. La membrane ainsi comprimée est-elle ensuite abandonnée à elle-même pendant un certain temps, les fibres reprendront plus ou moins complètement leur ancienne position, et par suite la perméabilité antérieure sera rétablie. Le fait que, après la détente, la perméabilité de la membrane a parfois été trouvée plus grande qu'elle ne l'était au début de l'expérience (sans qu'il pût alors être question de déchirures traversant la membrane dans toute son épaisseur), se laisse peut-être attribuer, comme l'avait déja soupçonné M. Eckhard, au déchirement d'une partie des fibres.

Si notre explication de l'accroissement de densité de la membrane sous l'influence d'une pression constante est fondée, la perméabilité, abaissée par la compression, devra se relever, non-seulement lorsque la membrane est détendue, mais aussi lorsque, plongée dans le liquide, elle reçoit aux deux côtés une charge égale à celle qui, antérieurement, ne la pressait que sur une de ses faces. Car alors la pression exercée par le liquide entre les fibres sera la même dans toute l'épaisseur de la membrane, et précisément égale à la pression extérieure qui pèse sur les deux faces. Or, dans ces conditions, les fibres rapprochées par la compression reprendront leur ancienne position tout aussi facilement que lorsque la pression est entièrement supprimée.

Pour vérifier s'il en est réellement ainsi, je disposai les expériences d'une manière un peu différente.

L'appareil employé est représenté dans la figure ci-jointe.



Entre deux anneaux de cuivre, *a* et *a'*, d'un diamètre de 2 décimètres, était serré un morceau de papier-parchemin humide. Pour rendre la clôture bien étanche, les deux anneaux étaient pourvus, aux côtés tournés l'un vers l'autre, de larges rebords *b*, recouverts chacun, sur sa face interne, d'un ruban de caoutchouc mince. Le papier était pris assez grand pour dépasser ces rebords. Les deux anneaux étaient fortement pressés l'un contre l'autre au moyen d'un certain nombre de vis de serrage *c*, qui traversaient le papier. Au côté externe, chaque anneau était fermé par une plaque de verre, au centre de laquelle il y avait une ouverture, comme la figure le montre pour l'un des côtés. Les deux ouvertures étaient pourvues de bouchons de gutta-percha perforés. Le bouchon *d*, visible dans la figure, était traversé d'un petit tube, au moyen duquel l'une des cavités comprises entre le verre et le papier-parchemin pouvait être mise en communication avec un vase à pression, où le liquide était maintenu, de la manière précédemment décrite, à un niveau constant. Dans l'autre bouchon, non visible dans le dessin, était fixé un tube court *e*, par

lequel la seconde cavité entre verre et parchemin communiquait avec l'air extérieur. Les anneaux portaient latéralement deux petits tubes *f* et *f'*, qui pouvaient être exactement fermés au moyen de bouchons métalliques taillés en cône. Ces tubes laissaient échapper l'air, pendant qu'on remplissait de liquide les deux cavités séparées par le papier-parchemin.

L'appareil était placé de façon que le diaphragme en papier-parchemin prît, comme le montre la figure, une position verticale. Le tube *h* était relié au vase à pression, et le tube *g* fixé au manomètre, ou simplement fermé. Lorsque l'appareil entier était rempli d'eau et en communication avec le vase à pression, le papier-parchemin se bombait, le côté convexe tourné vers le tube *e*. Il en résultait, à ce côté, l'expulsion d'une certaine quantité d'eau, qui s'échappait par le tube *e*. Combien d'eau il s'écoulait ainsi à raison de la distension de la membrane, et combien à raison de la filtration, c'est ce qu'on ne pouvait décider. Le fait que, dans ces expériences aussi, l'écoulement du liquide se ralentissait peu à peu, ne prouvait donc pas rigoureusement que la perméabilité de la membrane diminuât sous l'influence de la pression constante, — mais cette preuve n'était plus à fournir. Au bout de quelque temps l'écoulement devenait constant, d'où l'on pouvait conclure qu'alors au moins la distension avait atteint son maximum. S'il y avait une fissure au papier, l'eau s'écoulait de plus en plus rapidement, jusqu'à ce que la déchirure devînt enfin visible à l'œil nu. Si le serrage du papier entre les anneaux n'était pas étanche, ou si quelque part ailleurs une fuite existait dans l'appareil, cette fuite était immédiatement dévoilée par l'eau qui suintait au dehors. Lorsque la filtration était devenue à peu près constante, le tube *k* était fermé par une vis de serrage, puis le tube *g* était relié à *e*. De cette manière, la cavité restée jusque là sous la pression atmosphérique était mise en communication avec le vase à pression. La pression était donc alors à peu près la même aux deux côtés du papier, puisque l'eau ne pouvait s'écouler par *k*. Il y avait toujours quelque différence, due à ce que la membrane, dont le côté convexe était mainte-

nant en commnnication avec le vase à pression, devait, en vertu de son élasticité, exercer une certaine pression dans le sens opposé. Mais cette différence, faible dès le début, s'atténuait encore à mesure que le repos se prolongeait, parce que la membrane pouvait maintenant, au sein de l'eau, se rapprocher de sa position d'équilibre. Ce mouvement était toutefois si faible, que la diminution de la courbure de la membrane échappait à la vue. Elle n'en avait pas moins eu lieu, comme on le reconnaissait lorsque, au bout de quelque temps, le tube *g* était de nouveau fermé et détaché de *e*, et le tube *k* ouvert : une certaine quantité d'eau, 25 à 40 c c, s'écoulait alors immédiatement, en filet, par le tube *e*. La membrane, en effet, tout étant remis dans l'état primitif, reprenait sa position antérieure. Cet écoulement rapide ne durait que quelques secondes, puis l'eau tombait de nouveau lentement, goutte à goutte.

Le résultat de ces expériences fut le même que celui obtenu par détente ; la membrane était manifestement reposée, autrement dit, était devenue plus perméable qu'auparavant. La ligne V en donne un exemple. Il est à remarquer, ici encore, que la vitesse de filtration, surtout après la seconde période de repos, surpassait de beaucoup la vitesse primitive. Pourtant il n'y avait aucune perforation de la membrane, car plus tard la filtration se ralentit fortement, tandis que le liquide sortant par une déchirure s'écoule toujours avec une rapidité croissante. La valeur considérable de l'augmentation de l'écoulement, après cette seconde détente, montre déjà qu'une nouvelle distension du diaphragme, par laquelle l'eau serait simplement refoulée, ne peut être invoquée comme cause du phénomène. La même conclusion ressort d'ailleurs aussi de ce qui s'est passé, dans cette expérience, après la première détente. L'écoulement a alors augmenté encore pendant les premières heures qui suivirent le rétablissement de la pression primitive, tandis que la distension sera évidemment le plus forte au début. Cette distension a dû être certainement, dès les premières secondes après le rétablissement de la pression, très insignifiante chez une membrane qui, soumise pendant des heures

à la même pression sur ses deux faces, avait à peine perdu quelque chose de sa courbure.

Il est démontré aussi, par ces expériences, que la distension de la membrane et l'incurvation qui en résulte ne jouent pas le rôle principal dans la diminution de la perméabilité. On pourrait dire que, la membrane s'amincissant par la distension, les fibres doivent se rapprocher, en sorte que les canaux servant à la filtration deviendront plus étroits et offriront plus de résistance. Mais, par contre, la membrane acquiert une plus grande surface, et conséquemment les conduits devront s'élargir dans le sens parallèle à la surface. Il est difficile de décider à priori lequel de ces deux facteurs aura le plus d'influence. Aussi, je ne prétends pas que la distension soit en elle-même sans importance pour la perméabilité de la membrane, — mes expériences n'avaient pas pour objet de trancher cette question. Je me borne à faire remarquer que la distension ne joue pas le premier rôle. Car, dans les expériences sur la membrane tendue verticalement, la courbure diminuait à peine pendant le repos, et néanmoins l'accroissement de la perméabilité était considérable.

D'après tout ce qui précède, je crois donc pouvoir admettre que les changements observés, sous l'influence de la pression et de la durée des expériences, dans la filtration de l'eau et des matières dissoutes ou à un état de grande division, à travers des membranes fibreuses, doivent être attribués aux changements dans la distance des fibres qui constituent la membrane. De là découle cette conséquence, non dépourvue d'intérêt au point de vue physiologique, qu'il est irrationnel d'étendre les résultats ainsi trouvés à l'exsudation d'un liquide par les vaisseaux sanguins. M. Cohnheim, à l'occasion des considérations développées par M. Runeberg, a déjà recommandé un peu de prudence dans l'application, aux parois vivantes des vaisseaux sanguins, de résultats obtenus sur des membranes animales mortes [1]). Mais

---

1) *Vorlesungen über allgemeine Pathologie*, 2e éd., t. I, p. 494.

il est permis, je crois, d'aller plus loin et d'affirmer sans crainte que ce qui a été observé au sujet de l'influence de la perméabilité de membranes fibreuses ne peut, même abstraction faite de toute propriété vitale, être appliqué aux parois de ceux des vaisseaux dont il y a lieu de tenir compte en première ligne, les vaisseaux capillaires. Ceux-ci, en effet, ne possèdent pas une paroi fibreuse, et le tissu fibreux qui les entoure n'est jamais fixé comme l'est la couche externe des membranes employées dans les expériences.

Il ne s'ensuit pas, toutefois, que les recherches expérimentales faites à l'aide de membranes fibreuses ne puissent rien nous apprendre à l'égard de la transsudation par les vaisseaux sanguins, si, négligeant l'influence des propriétés particulières de la paroi, on se contente d'étudier les phénomènes qui dépendent de la nature du liquide filtrant. Sous ce rapport, je ne mentionnerai qu'un seul point. M. Runeberg a trouvé qu'une paroi d'intestin, toutes choses égales d'ailleurs, laisse passer beaucoup moins de liquide, et un liquide beaucoup moins riche en albumine, quand on filtre du sang défibriné que lorsqu'on opère sur du sérum sanguin [1]). Je puis confirmer ce résultat. La cause de la différence doit probablement être cherchée dans la présence des corpuscules sanguins. Pour étudier l'influence exercée sur la filtration par des particules très ténues, suspendues dans le liquide, j'ai filtré à travers la paroi d'un intestin de mouton, sous pression égale, alternativement du sérum de bœuf pur, et le même sérum mélangé de résine copal en poudre très fine. La densité de cette matière ne surpasse que très peu celle du sérum, de sorte que les particules restent très longtemps en suspension dans le liquide. Les intestins choisis pour les expériences avaient déjà servi quelque temps à la filtration sous pression constante (pour prévenir la putréfaction on ajoute par 1000 gr. de sérum 2 gr. d'acide salicylique) et avaient ainsi acquis une perméabilité à peu près constante. La ligne VI donne un exemple des résultats obtenus.

1) *Archiv der Heilk.*, t. XVIII, p. 44.

Avec le sérum mélangé de copal la filtration marcha plus lentement qu'avec le sérum pur. La détermination de la proportion des matières solides dans les différentes fractions du produit n'avait pas de valeur, vu que, avec le liquide, il passait à travers l'intestin des particules excessivement fines de copal, dont on ne réussit pas à débarrasser le liquide filtré. La teneur en albnmine de celui-ci ne pouvait donc être connue exactement. Bien que, dans ces expériences, les circonstances fussent des plus favorables à l'obstruction des pores de la membrane, la diminution de la perméabilité n'en dépendait pourtant pas. Car lorsque, après le sérum au copal, on filtra de nouveau du sérum pur, la quantité du liquide obtenu redevint plus grande, comme le montre la représentation graphique; et pourtant les particules obstruantes, s'il y en avait, devaient continuer à exercer leur influence. — En poursuivant les recherches dans cette direction, on arriverait peut-être à jeter quelque jour sur la cause des propriétés de transsudats qui proviennent de vaisseaux contenant du sang anormalement riche en corpuscules.

Mais il suffit ici de signaler cette question en passant. Mon but proprement dit était de montrer que la cause des changements de perméabilité des membranes, qui jusqu'à ce jour ont été employées aux expériences de filtration, réside dans leur structure fibreuse, et que, par conséquent, les résultats trouvés à cet égard par la voie expérimentale ne sauraient être appliqués aux parois des plus petits vaisseaux sanguins, comme l'a fait M. Runeberg dans ses considérations sur la production de l'albuminurie.

Explication de la Planche.

Ligne 1. Eau distillée, filtrée à travers la poche de papier-parchemin.
Pression: 64 mm Hg.
Sur la ligne des abscisses 1 mm correspond à 1 heure.
" " " " ordonnées " " " " 5 c c.
× trois heures de détente.
× × " " " "

Ligne 2. Eau distillée, filtrée à travers la poche de papier-parchemin. Pression: 64 mm Hg.
Sur la ligne des abscisses 1 mm correspond à ½ heure.
" " " " ordonnées " " " " ½ c c.
× 1 heure 20 min. de détente.
× × 4 heures " "
× × × 15 heures " "

Ligne 3. Eau distillée, filtrée à travers la poche de papier-parchemin. Pression: 64 mm Hg.
Sur la ligne des abscisses 1 mm correspond à ½ heure.
" " " " ordonnées " " " " ¼ c c.
× 3 heures de détente.
× × 2½ " " "
× × × 5 " " "

Ligne 4. Eau distillée parfaitement limpide, filtrée à travers la poche de papier-parchemin. Pression: 60 mm Hg.
Sur la ligne des abscisses 1 mm correspond a ½ heure.
" " " " ordonnées " " " " 2 c c.
× 16 heures de détente.

Ligne 5. Eau distillée, filtrée à travers le diaphragme de papier-parchemin. Distance entre le niveau du liquide dans le vase à pression et le tube *e*: 85 cm.
Sur la ligne des abscisses 1 mm correspond à ½ heure.
" " " " ordonnées " " " " ½ c c.
× 18 heures de pression égale aux deux côtés du papier. Quantité du liquide écoulé immédiatement après la cessation de la pression en *e*: 33 c c.

Ligne 6. Sérum de bœuf, filtré à travers la paroi d'un intestin de mouton. Pression: 52 mm Hg.
Sur la ligne des abscisses 1 mm correspond à ½ heure.
" " " " ordonnées " " " " ½ c c.
× intestin rempli de sérum dans lequel était suspendu du copal en poudre fine; 15 minutes de détente.
× × intestin lavé par filtration puis rempli de sérum pur; 15 minutes de détente.

LA POLARISATION

DES

RECEPTEURS TÉLÉPHONIQUES,

PAR

J. W. GILTAY.

On sait depuis assez longtemps qu'une bouteille de Leyde, tant à la charge qu'à la décharge, produit un son. Le moyen le plus commode d'observer ce phénomène consiste à relier les deux armatures de la bouteille aux extrémités du fil secondaire d'une petite bobine d'induction. Si alors on lance dans le fil primaire le courant d'un élément galvanique et qu'on fasse agir le marteau de Neef, les vibrations de celui-ci déterminent chaque fois la charge, puis la décharge, de la bouteille. Il en résulte que cette bouteille elle-même se met à vibrer et donne un ton qui, bien que peu intense, est distinctement perceptible.

Le hasard m'a fait découvrir qu'un élément de sélénium, soit le cylindrique de Bell, soit le plat de Shelford-Bidwell [1]), donne également un son dans ces circonstances. La couche de sélénium, mauvaise conductrice, joue probablement le rôle d'isolateur entre les conducteurs métalliques, qui eux-mêmes représentent les armatures d'une bouteille de Leyde. Le son était très aigu et s'entendait jusqu'à la distance de 30 à 40 cm. Si l'on veut

---

[1]) *Nature*, Nov. 18, 1880.

toutefois obtenir d'un condensateur un son intense, on ne peut employer ni la bouteille de Leyde, ni la pile à sélénium. Dans toutes les deux, les conducteurs métalliques sont trop éloignés l'un de l'autre, et la couche isolante, verre ou sélénium, est aussi trop rigide.

L'expérience se fait beaucoup mieux avec un condensateur composé de couches alternatives d'étain en feuilles minces et de papier. MM. Wright et Varley ont les premiers opéré de cette manière, et l'expérience a été notablement simplifiée par MM. Pollard et Garnier [1]). Ceux-ci construisaient leur condensateur de 28 petites lames d'étain, de 6 sur 12 cm, qui étaient séparées par des feuilles de papier à lettres et qui communiquaient alternativement, l'une moitié avec une première vis de serrage, l'autre moitié avec une seconde. Ce condensateur était relié aux extrémités du fil secondaire d'une bobine d'induction. La rupture et la clôture du circuit primaire, dans lequel était intercalée une pile, s'effectuaient au moyen d'un transmetteur de Reiss, dont toutefois la membrane était remplacée par une plaque vibrante métallique, et le contact de platine par un contact de charbon. Lorsqu'on chantait dans ce transmetteur, convenablement ajusté, le contact de charbon était, à chaque vibration, rompu, puis rétabli. Dans le circuit secondaire de la bobine naissaient donc des courants d'induction, qui chargeaient et déchargeaient alternativement le condensateur. Celui-ci, par suite, entrait en vibration et reproduisait le son qui avait été reçu par le transmetteur.

Pour répéter l'expérience de MM. Pollard et Garnier, je pris un condensateur de 40 feuilles d'étain, de 6 sur 12 cm, séparées par du papier paraffiné. La pile intercalée dans le circuit primaire de la bobine d'induction était composée de 3 éléments Bunsen. L'hélice primaire consistait en 4 couches de fil épais de $0^{cm},045$, l'hélice secondaire en 20 couches de fil épais de $0^{cm},016$. Au centre de la bobine se trouvait, comme c'est le cas ordinaire,

---

[1]) Dumoncel, *Le Téléphone*, 4e éd., p. 23.

uu faisceau de fils de fer doux. Pour l'expérience en question, on peut se passer de l'interrupteur de Neef, ainsi que du condensateur usité dans les grands appareils d'induction et logé dans leur pied. Lorsque je fis chanter dans le transmetteur, le condensateur rendit un son, qui pouvait être entendu dans toute l'étendue d'une salle. Bien que ce son n'affecte pas agréablement le sens musical, l'expérience n'en reste pas moins très curieuse.

Le condensateur n'a acquis une valeur pratique pour la téléphonie que par les recherches de M. Herz et de M. Dunand. Ce dernier physicien [1]) introduisit, au lieu du transmetteur de Reiss, un microphone dans le circuit primaire d'une bobine d'induction, dont le fil secondaire était en rapport, par ses extrémités, avec les armatures d'un condensateur.

Lorsqu'on parlait devant le microphone, le condensateur ne faisait entendre que des crépitements. Le tic-tac d'un réveil et la sonnerie d'une montre à répétition étaient perçus, mais très indistinctement et toujours sous forme de bruits crépitants.

M. Dunand eut alors l'heureuse inspiration de donner au condensateur une charge permanente, en interposant une pile dans le circuit secondaire. Aussitôt que cette idée fut réalisée, il constata que le condensateur était capable de reproduire exactement tous les sons articulés. Les meilleurs résultats furent obtenus avec un condensateur composé de 36 feuilles d'étain, mesurant 6 cm en carré, séparées par du papier à lettres. Avec une bobine d'induction de 12 cm, 10 éléments Bunsen dans le circuit secondaire et 2 dans le circuit primaire, le condensateur parlait aussi bien qu'un téléphone de Bell. Avec 15 éléments Bunsen, M. Dunand pouvait entendre les paroles prononcées, lorsque le condensateur était éloigné de 90 cm de l'oreille.

Le condensateur à air de M. Dolbear [2]) n'est, en principe, que le condensateur parlant de M. Dunand.

1) *Comptes rendus*, 3 Janv. 1881.
2) *Scient. American*, 18 Juin 1881.

Dans les pages suivantes je me propose d'étudier de plus près l'action téléphonique du condensateur, et j'essaierai surtout de donner une explication de l'action, en apparence si singulière, de la pile auxiliaire. Quoique des expériences aient été faites à ce sujet par divers physiciens, personne, que je sache, n'a encore entièremeut élucidé la question.

La disposition suivante m'a paru très convenable pour observer l'influence de la pile auxiliaire sur le condensateur.

Un élément Leclanché et un microphone, modèle Hopkins [1]), furent reliés au fil primaire d'une bobine d'induction. Dans le circuit secondaire (Pl. X, fig. 1) j'introduisis un téléphone, une pile de 10 éléments Bunsen et un condensateur. A la planchette du microphone était suspendue une montre. Lorsque *c* communiquait avec *a*, la pile auxiliaire fonctionnait et le condensateur avait donc une charge permanente. En tenant à une oreille le condensateur et à l'autre le téléphone, on entendait à chacune, très distinctement, le tic-tac de la montre. Mais dès que *c* était relié à *b*, ce qui mettait la pile hors de service, tout son cessait dans le condensateur, tandis que le téléphone continuait à reproduire le tic-tac [2]).

---

[1]) *Scient. American*, 19 mars 1881. Ce microphone convient parfaitement pour l'expérience de la reproduction du tic-tac d'une montre. On peut supprimer la plaque vibrante métallique et fixer la rondelle horizontale de charbon sur une planchette verticale. Ce petit appareil est beaucoup plus sûr que le modèle original de Hughes, et il peut être rendu tout aussi sensible et aussi simple.

[2]) Le condensateur reste alors comme inducteur, non comme conducteur, dans la ligne. Lorsqu'on intercale un pareil condensateur dans un circuit téléphonique, le son n'est que très peu affaibli. Le téléphone dont je me servais avait une résistance de 240 ohms, le condensateur une résistance de 1240000 ohms. Si le condensateur fontionnait comme conducteur, son introduction dans la ligne produirait donc un énorme affaiblissement du son.

Si l'on examine la question de savoir quelle est l'action exercée sur le condensateur par la pile auxiliaire, on trouve que deux explications sont possibles.

En premier lieu, on peut se figurer que le condensateur soit seulement rendu *sensible* par la pile auxiliaire, et que telle est la raison pour laquelle un condensateur à charge permanente peut seul faire percevoir les courants téléphoniques, d'intensité si faible.

Mais, en second lieu, il est possible aussi que, grâce à la pile auxilaire seulement, le condensateur devienne capable de reproduire exactement toutes les formes de vibration. Dans le premier cas il s'agirait donc d'une action purement quantitative, dans le second, d'une action qualitative. Si la première explication est vraie, tous les sons rendus par le condensateur doivent être renforcés par la charge permenente. En outre, il serait alors possible de faire reproduire la parole articulée par un condensateur non chargé, à condition d'y envoyer des charges téléphoniques très fortes.

Si, au contraire, la seconde explication touche juste, le condensateur non polarisé ne doit pas pouvoir être amené à parler, même par les courants téléphoniques les plus puissants. En revanche, le condensateur sera alors en état de transformer en sons articulés des courants même très faibles, pourvu qu'on le charge au moyen d'une pile auxiliaire.

Je vais maintenant décrire d'abord une couple d'expériences propres à jeter du jour sur la question de savoir si des sons non articulés sont renforcés par la pile auxiliaire.

Un élément Leclanché fut relié au circuit primaire d'une bobine d'induction (fig. 2) et le marteau de Neef fut mis en action. Dans le circuit secondaire j'introduisis une pile de 57 petits éléments Leclanché, un condensateur et une pile de sélénium d'une résistance de 26000 ohms. Cette dernière sert uniquement à rendre négligeable l'augmentation de résistance qui se produit dans le fil secondaire par suite de l'interposition de

la pile auxiliaire. Quand *c* était rattaché à *a*, le condensateur avait une charge permanente; quand, au contraire, *c* était relié à *b*, la pile auxiliaire n'intervenait plus. L'expérience montra que le condensateur donnait un son beaucoup plus intense dans le premier cas que dans le second. Le son est donc renforcé par la pile auxiliaire.

Ce même fait a encore été prouvé, d'une manière un peu différente, par l'expérience suivante:

Le circuit primaire de la bobine d'induction (fig. 3) comprenait de nouveau un élément Leclanché, et le marteau fonctionnait. Le circuit secondaire restait ouvert. A quelques centimètres de la bobine était placé un téléphone, de telle sorte que l'aimant se trouvât dans le prolongement de l'axe de la bobine. Ce téléphone était en communication avec la pile, l'élément de sélénium et le condensateur de l'expérience précédente. Par cette disposition, il ne pouvait s'éveiller dans le téléphone que des courants induits très faibles, qui se rendaient au condensateur.

Le résultat de l'expérience fut que le condensateur non chargé ne donnait absolument rien à entendre, tandis qu'après la mise en action de la pile il émettait un son assez fort.

Ayant ainsi reconnu que le condensateur est rendu, par la pile auxiliaire, plus sensible aux courants faibles, nous allons rechercher si un condensateur non chargé peut donner aussi des sons articulés, lorsqu'on lui envoie des charges téléphoniques très fortes. Si tel est réellement le cas, il faudra admettre que la pile auxiliaire sert exclusivement à sensibiliser le condensateur et qu'elle n'a pas d'influence sur la forme des vibrations.

Pour résoudre cette question, je pris un microphone d'Ader, que j'unis à 3 éléments Bunsen et au fil primaire de la bobine. La preuve que j'obtenais de cet appareil des courants téléphoniques très forts, c'est qu'un téléphone Siemens, mis en communication avec le circuit secondaire de la bobine, était entendu et compris par toute une salle. Pour cela, il était nécessaire qu'on parlât à haute voix et tout près de la plaque vibrante du microphone,

et que le téléphone fût pourvu d'un entonnoir en carton, semblable à celui en usage pour le phonographe [1]).

Au lieu de transmettre ces courants induits au téléphone Siemens, je les envoyai à un condensateur non chargé. Des mots prononcés devant le microphone furent alors entendus, mais non compris, dans le condensateur. Comme le son avait assez de force pour que, s'il avait été articulé, on eût pu le comprendre, je conclus de cette expérience que le condensateur, en l'absence de pile servant à le charger, est incapable de reproduire des sons articulés. Une mélodie, sifflée avec force et près de la plaque vibrante du microphone, fut entendue et reconnue; ce son, toutefois, était extrêmement faible.

La supposition que la pile auxiliaire donne simplement plus de sensibilité au condensateur, mais n'a rien à démêler avec la forme des vibrations, est donc fausse. Cette pile seule met le condensateur en état de reproduire exactement toutes les vibrations, et en outre elle renforce le son, tant articulé que non articulé.

Afin de savoir qu'elle doit être à peu près la force de la pile auxiliaire, pour que le condensateur articule, je fis les expériences suivantes, dans lesquelles j'employai de nouveau le microphone d'Ader, avec 3 éléments Bunsen. Les courants induits dans le circuit secondaire furent envoyés au condensateur ci-dessus décrit. Dans la première expérience, le condensateur n'avait pas de charge permanente; dans la seconde, un élément Leclanché était interposé dans le circuit secondaire, dans la troisième, il y avait deux de ces éléments.

Voici les résultats de ces expériences.

1e expérience. Condensateur sans pile auxiliaire. Du langage

[1]) De cette manière, un téléphone a pu inscrire très distinctement ses vibrations sur la feuille d'étain enroulée autour du cylindre d'un phonographe. Je me propose de continuer mes expériences à ce sujet. M. Edison (*Engineer*, 1878, t. 46, p. 425) a déjà signalé la possibilité d'un pareil „télé-phonographe", mais j'ignore si l'expérience en a été faite par lui.

parlé, pas un mot n'est compris; on n'entend rien qu'un fort bruit. Les cinq voyelles ne se laissent pas distinguer; seulement, *o* est la plus forte, *i* et *u* sont les plus faibles.

2e expérience. Condensateur chargé par un élément Leclanché. On peut maintenant distinguer les cinq voyelles et comprendre assez bien la parole.

3e expérience. Condensateur chargé par deux éléments Leclanché. Tout se distingue et se comprend bien.

Comme on le voit, un seul élément Leclanché est presque suffisant pour rendre possible la reproduction du son articulé.

Que par une charge permanente du condensateur le son produit soit renforcé, c'est ce qui se conçoit aisément. Il est moins facile de dire à quel titre l'action de la pile auxiliaire est nécessaire pour permettre au condensateur de rendre exactement la forme des vibrations et par conséquent de produire des sons articulés.

Ce qu'on trouve à ce sujet dans les auteurs, au moins ce qui mérite d'être cité, se réduit à très peu de chose.

M. Dunand lui-même n'a donné, que je sache, aucune espèce d'explication du fait qu'il a découvert.

M. Dolbear [1]), en décrivant son condensateur à air, s'exprime avec beaucoup de réserve et d'une façon très indéterminée sur la pile auxiliaire. On ne peut même inférer de son article s'il regarde l'emploi de cette pile comme seulement utile, ou comme indispensable. Il dit: „if one of the terminals of a receiver be charged in any way, the reaction between the plates will be stronger than it will be without"; et un peu plus loin: „the electrically charged terminals in this system acting in a way analogous to the permanent magnets in the magnetic system."

Cette analogie vaguement énoncée entre le rôle de la pile auxiliaire dans le condensateur et celle de l'aimant permanent dans le téléphone de Bell peut difficilement être appelée une explication.

Dans l'ouvrage déjà cité de M. Dumoncel, cette analogie se

---

[1]) *Scient. American*, 18 juin 1881.

trouve aussi indiquée çà et là (p. 213 et suiv.). Quant à une vue un peu arrêtée, on ne doit pas l'y chercher.

Dans les lignes suivantes j'espère montrer de quelle manière la pile auxiliaire agit sur la forme des vibrations.

Considérons, à cet effet, un microphone et une pile reliés au fil primaire d'une bobine d'induction, et supposons le circuit secondaire fermé. Un son simple étant produit devant le microphone, le fil mince sera parcouru par un courant d'induction, qui peut être représenté par la courbe de la fig. 4. Sur la ligne des abscisses sont portés les temps, les ordonnées indiquent l'intensité du courant. Si ensuite on ouvre le circuit secondaire, et que ses deux extrémités soient mises en rapport avec les garnitures d'un condensateur, celui-ci sera alternativement chargé et déchargé. La courbe de la fig. 4, qui tout à l'heure représentait le développement des courants d'induction, donnera maintenant une image des changements de grandeur et de signe des charges qui se rendent au condensateur.

Pour que le condensateur, sous l'influence de ces charges alternatives, fasse entendre le même son qui a été produit près du microphone, il faut que sa forme de vibration s'accorde avec la courbe de la fig. 4. Mais, en analysant d'un peu plus près le mouvement exécuté par le condensateur, nous reconnaîtrons que les feuilles d'étain se meuvent suivant une loi toute différente. Pour la facilité, j'appellerai la charge „positive" lorsque les armatures de rang pair seront chargées en +, celles de rang impair en —; dans le cas contraire, la charge sera dite négative.

A l'époque *a* (fig. 4) la charge est $= 0$; les armatures du condensateur se trouvent donc, à ce moment, dans leur position d'équilibre.

De *a* à *b* la charge croît de 0 jusqu'à son maximum positif; pendant ce temps, les armatures se meuvent l'une vers l'autre.

De *b* à *c*, la charge décroît de son maximum positif jusqu'à 0, les feuilles s'éloignent l'une de l'autre et retournent à leur position d'équilibre.

De *c* à *d*, la charge augmente de 0 jusqu'à son maximum négatif, les feuilles *se rapprochent de nouveau l'une de l'autre.*

De *d* à *e*, la charge diminue de son maximum négatif jusqu'à 0, les feuilles s'éloignent l'une de l'autre et retournent à leur position d'équilibre.

D'après cela, la fig. 5 donnerait à peu près l'image du mouvement du condensateur, correspondant à la variation des charges représentée dans la fig. 4.

Bien que nous n'ayons pas encore déterminé avec une exactitude mathématique les courbes du mouvement du condensateur et du microphone, nous pouvons pourtant remarquer entre l'une et l'autre un rapport simple, en ce qui concerne la vitesse du mouvement. Si l'on compare la fig. 4 à la fig. 5, on voit, en effet, que les feuilles du condensateur exécutent deux vibrations entières dans le temps où le microphone n'en fait qu'une seule.

Il est donc à prévoir qu'un son, émis devant le microphone, sera reproduit par le condensateur à une octave plus haut. Quant au point de savoir si cette octave aura le même timbre que le son fondamental, nous le laisserons provisoirement indécis.

Une expérience expressément faite pour vérifier cette présomption m'a effectivement montré que le condensateur non chargé reproduit tous les tons à l'octave supérieure.

On pourrait penser que déjà dans mes expériences antérieures, avec le condensateur non chargé, j'eusse dû observer cette surélévation du ton. Mais tel n'est pas le cas. Les sons qu'on obtient du condensateur, lorsque la pile auxiliaire est alternativement introduite dans le circuit, puis exclue, diffèrent beaucoup en force, ce qui rend extrêmement difficile de reconnaître leur différence de hauteur. Il était donc nécessaire de disposer les choses de manière que, le condensateur restant appliqué à l'oreille, on pût à volonté, et instantanément, mettre la pile

auxiliaire dans le circuit ou l'en faire sortir. Les deux sons se suivent alors immédiatement, et leur comparaison devient possible. Dans le circuit primaire de la bobine d'induction j'introduisis 3 éléments Bunsen et un microphone Ader. Le circuit secondaire comprenait un condensateur, une pile de 6 éléments Leclanché et un bouton à pression. Ce dernier était disposé de façon que, dès qu'on appuyait dessus, la pile cessait de faire partie du circuit. Dans ce cas, le condensateur n'était donc pas polarisé; lâchait-on au contraire le bouton, le condensateur recevait la charge des 6 éléments Leclanché.

Tout près de la plaque vibrante du microphone Ader fut donné, au moyen d'une petite flûte, le *la* d'orchestre. En écoutant au condensateur chargé, on entendait très distinctement le *la*. Mais dès que le bouton était abaissé, et que par conséquent la pile n'agissait plus, le son devenait subitement beaucoup plus faible et, en outre, montait d'une octave.

Pour expérimenter aussi sur un son simple, je pris un diapason, qui fut attaqué à l'archet tout près du microphone. Le son obtenu de cette manière, même de diapasons très grands, était toutefois trop faible; sans pile auxiliaire on n'entendait rien. Lorsque je faisais vibrer le diapason par la percussion, l'expérience réussissait, il est vrai, mais dans ce cas on n'a plus un son simple. Un tuyau d'orgue fermé donna également le résultat désiré. La clarinette aussi se prête très bien à l'expérience, pourvu qu'on n'y souffle pas avec trop de force, car alors il se produit dans le microphone des ruptures de contact, qui rendent le son saccadé.

J'ai maintes fois répété ces expériences, et j'ai fait apprécier par différentes personnes, à sens musical exercé, la différence de hauteur du ton: toujours elles l'ont évaluée à une octave. L'expérience est parfois troublée par la production d'un son dans le microphone; un petit coup donné de temps en temps sur la plaque vibrante suffit ordinairement pour remédier à ce défaut.

Nous savons donc maintenant que le condensateur non polarisé rend tous les sons à une octave plus haut. Y a-t-il en outre changement de timbre, ou bien une vibration simple du microphone détermine-t-elle aussi un son simple dans le condensateur? C'est ce que nous ne voulons pas examiner pour le moment. Mais, même dans ce dernier cas, qui est le plus favorable, il ne sera pas encore possible de faire produire au condensateur des sons articulés. La raison en est facile à découvrir si l'on considère que, d'après M. Helmholtz, les voyelles se distinguent entre elles par des tons accessoires constants, caractéristiques. Lorsqu'on prononce, par exemple, la voyelle *A*, n'importe à quelle hauteur, il y entre toujours le ton *si* ♭'', qui est encore renforcé par la résonance de la cavité buccale. L'émission de l'*A* a-t-elle lieu devant le microphone, tous les tons dont cette voyelle se compose, et par conséquent aussi le *si* ♭'' caractéristique, sortiront, du condensateur non chargé, avec une surélévation d'une octave. Le résultat sera que le son entendu dans le condensateur aura entièrement perdu le caractère de la voyelle *A*.

L'exactitude de cette assertion est prouvée par l'expérience suivante.

Un microphone Ader et 3 éléments Bunsen sont placés dans le circuit primaire d'une bobine d'induction. Dans le circuit secondaire j'introduis un condensateur, une pile de 3 éléments Leclanché et un bouton à pression. Ce dernier est relié de telle sorte que le condensateur n'est chargé que lorsqu'on abaisse le bouton. La voyelle *O* étant prononcée devant le microphone, on l'entend très distinctement dans le condensateur, si le bouton est abaissé. Quand au contraire on relâche celui-ci, ce qui fait perdre sa charge au condensateur, on entend nettement la voyelle *A*. Ce phénomène est la conséquence du fait que les tons caractéristiques des voyelles *O* et *A* (*si* ♭' et *si* ♭'') diffèrent précisément d'une octave [1]).

---

[1]) Helmholtz, *Die Lehre von den Tonempfindungen*, 3e éd., p. 172.

Quant aux consonnes, malgré cette surélévation du ton, elles se distinguent bien, de sorte que, si l'on prononce par exemple *obrocodobro* devant le microphone, le condensateur non chargé laisse entendre très distinctement *abracadabra*.

Après avoir reconnu pourquoi un condensateur non chargé ne peut servir comme récepteur téléphonique, cherchons quel est le rôle joué par la pile auxiliaire.

La fig. 4 représentant de nouveau les changements de grandeur et de signe des charges téléphoniques envoyées au condensateur, voyons comment celui-ci se mouvra lorsqu'il possédera en outre une charge permanente L.

Au moment a (fig. 4), la charge est L, les feuilles sont en repos.

De a à b, la charge croît depuis L jusqu'à son maximum; les feuilles se rapprocheront donc l'une de l'autre.

De b à c, la charge diminue depuis son maximum jusqu'à L, et par conséquent les feuilles s'éloignent l'une de l'autre.

De c à d, la charge diminue de L jusqu'à son minimum, parce que la charge téléphonique qui arrive maintenant est de signe contraire à celui de la charge permanente. Par suite, les feuilles s'écartent encore davantage.

De d à e, la charge croît depuis son minimum jusqu'à L, les feuilles se meuvent de nouveau vers leur position d'équilibre.

Le condensateur chargé suit donc à peu près, dans son mouvement, la courbe esquissée dans la fig. 4; les vibrations du microphone sont reproduites par lui exactement avec la même vitesse, et cela, comme il résulte des considérations précédentes, parce que la pile auxiliaire empêche l'inversion de la polarité. Il n'est pas nécessaire pour cela que la charge permanente soit très considérable; pourvu qu'elle surpasse la plus forte charge téléphonique qui atteint le condensateur, celui-ci sera apte à rendre des sons articulés. Nous avons vu, effectivement, que la

faible charge d'un seul élément Leclanché est presque suffisante pour l'articulation.

Le condensateur chargé prononce d'une manière parfaite; grâce à la passivité des feuilles d'étain, le son est reproduit beaucoup plus naturellement que par le téléphone de Bell.

La pile auxiliaire donne en outre, comme nous l'avons vu, plus de sensibilité au condensateur, et cela se comprend si l'on réfléchit que la force attractive est proportionnelle au carré de la différence de potentiel. Quand l'une des armatures communique avec la terre, et que le potentiel de l'autre est $= V$, on a pour l'attraction K:

$$K = V^2. \text{const.}$$
$$dK = 2\,V.\,dV.\ \text{const.}$$

On voit que la variation de l'attraction, résultant de la variation du potentiel, est proportionnelle au potentiel primitif de l'armature non reliée à la terre. Et comme cette variation de l'attraction est la cause du mouvement sonore, l'intensité du son croîtra également avec le potentiel initial.

Bien que, dans ce qui précède, nous n'ayons pas déterminé d'une manière rigoureuse les courbes du mouvement du condensateur chargé et non chargé, l'accord entre les résultats du raisonnement et ceux de l'expérience a pourtant montré que nos considérations sur l'action de la pile auxiliaire étaient parfaitement correctes.

La forme exacte de ces courbes de mouvement peut d'ailleurs être trouvée par le développement mathématique suivant, dont je suis redevable à M. le professeur Bosscha.

Lorsqu'un son simple est produit devant le microphone interposé dans le circuit primaire de la bobine d'induction, l'intensité des

courants induits dans le fil mince peut être représentée par une sinusoïde. Si l'on fait communiquer le fil secondaire avec un condensateur pourvu en outre d'une charge permanente a, la valeur de la charge sera donnée à chaque instant par l'expression $a + b \sin 2\pi \frac{t}{T}$, où T désigne la durée de vibration du ton produit devant le microphone. L'attraction K des garnitures étant proportionnelle au carré de la charge, on a

$$K = \left(a + b \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2 = a^2 + 2ab \sin 2\pi \frac{t}{T} + b^2 \sin^2 2\pi \frac{t}{T}.$$

Quand a est $= 0$, c'est-à-dire quand le condensateur ne possède pas de charge permanente, on a:

$$K_1 = b^2 \sin^2 2\pi \frac{t}{T}.$$

Comme, en cas de petites amplitudes, l'écart peut être supposé proportionnel à l'attraction exercée à cet instant, cette dernière expression représente aussi la courbe du mouvement pour le condensateur non chargé; elle est donc l'équation de la courbe tracée dans la fig. 5. En remplaçant

$$\sin^2 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{par} \quad \frac{1 - \cos 2\pi \frac{t}{\frac{1}{2}T}}{2},$$

on obtient:

$$K_1 = \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} \cos 2\pi \frac{t}{\frac{1}{2}T}.$$

Il suit de là que la courbe de la fig. 5 peut être décomposée en une sinusoïde à durée de vibration $\frac{1}{2}T$, et en une droite située parallèlement à l'axe, à la distance $\frac{b^2}{2}$. Cela signifie donc qu'un

son simple, produit devant le microphone, sera rendu par le condensateur, non seulement à une octave plus haut, mais aussi comme son simple.

L'expression obtenue en dernier lieu pour K_1 étant substituée dans la forme sous laquelle nous avons développé K, on a

$$K = a^2 + 2\,a\,b\,sin\,2\,\pi\,\frac{t}{T} + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2}\,cos\,2\,\pi\,\frac{t}{\frac{1}{2}T}.$$

Cette expression nous dit que la courbe du mouvement du condensateur *chargé* peut être décomposée en une droite menée, à une distance $a^2 + \frac{b^2}{2}$, parallèlement à l'axe, et en deux sinusoïdes, l'une à période T, l'autre à période $\frac{1}{2}\,T$. Outre le son simple, produit devant le microphone, le condensateur fera donc entendre aussi l'octave supérieure de ce ton.

Ce résultat est entièrement confirmé par mes expériences. Dans le circuit primaire de la bobine d'induction j'avais placé le microphone Ader et 3 éléments Bunsen. Avec le circuit secondaire communiquait le condensateur, qui, au moyen de deux boutons à pression, pouvait à volonté être chargé par 1 ou par 2 éléments Leclanché. Devant le microphone je faisais émettre, sur une flûte, le *la* d'orchestre. Outre le *la*, j'entendais alors aussi, quoique faiblement, l'octave supérieure dans le condensateur, lorsque celui-ci était chargé par un seul élément Leclanché. Avec la charge de deux éléments Leclanché, cette octave était encore perceptible, mais plus faiblement.

Suivant la formule que nous avons trouvée pour K, les amplitudes des deux tons sont dans le rapport $2\,a\,b : \frac{b^2}{2}$, et les intensités sont donc entre elles comme $4\,a^2 b^2 : \frac{b^4}{4}$, ou comme $16 a^2 : b^2$. Le ton fondamental aura donc la même intensité que l'octave, lorsque $4a$ sera $= b$. Déjà pour une charge permanente faible, le ton fondamental sera plus fort que l'octave; avec une

pile auxiliaire d'un petit nombre d'éléments, on ne pourra plus distinguer l'octave dans la masse sonore. Sous l'influence d'une charge permanente suffisante, le mouvement du condensateur sera donc entièrement conforme à la courbe de la fig. 4.

Dans l'article ci-dessus cité de M. Dolbear il est fait allusion, comme nous l'avons vu, à l'analogie entre l'action de la pile auxiliaire sur le condensateur et celle de l'aimant permanent dans le téléphone. M. Navez [1]) est, à ma connaisance, le seul qui ait essayé d'expliquer le rôle que l'aimant permanent joue dans le téléphone *récepteur*. Il prétend que, dans un téléphone sans aimant, il y a inversion de polarité dès qu'il arrive un courant plus fort que celui qui l'avait précédé immédiatement, c'est-à-dire, un courant engendré par un mouvement plus étendu de la plaque vibrante.

„Supposons", dit-il, „deux Bell conjugués, celui qui remplit les fonctions de récepteur n'étant pas muni d'un aimant permanent. La plaque de l'envoyeur fait un mouvement, et le courant d'induction produit, activant l'électro-aimant du récepteur, détermine dans sa plaque un mouvement correspondant. La plaque de l'envoyeur fait un autre mouvement plus grand que le précédent, et envoie en conséquence, dans la bobine, un courant qui doit nécessairement renverser les pôles de l'électro-aimant et déterminer deux mouvements en sens inverse de la plaque réceptrice pour un mouvement de la plaque de l'envoyeur."

Cette assertion est vraie, sans contredit, mais elle ne renferme pas la vérité tout entière. Pour qu'un courant opère le renversement de la polarité, il n'est nullement nécessaire qu'il soit plus fort que son prédécesseur, car, avant que le second courant n'arrive, le premier a déjà cessé, et par suite toute polarité a

1) *Bulletin de l'Acad. royale de Belgique*, 1878, t. XLV, p. 423.

disparu du noyau de fer doux; je néglige, bien entendu, le très faible magnétisme rémanent que le noyau aura acquis sous l'action des courants téléphoniques. Dès le second courant, il y a aura donc renversement de la polarité, même si l'intensité de ce courant est seulement égale, ou même inférieure, à celle du premier. C'est ce que le raisonnement suivant mettra encore mieux en évidence.

Supposons que dans le circuit secondaire de notre bobine d'induction se trouve un téléphone sans aimant permanent, et que la fig. 4 représente de nouveau la marche des courants induits dans ce circuit. Voyons quel mouvement la plaque vibrante du téléphone exécutera sous l'influence de ces courants.

Au moment *a* (fig. 4), aucun courant ne passe par la petite bobine, le noyau en fer n'est donc pas aimanté, la plaque vibrante n'est pas attirée.

De *a* à *b*, un courant de plus en plus fort parcourt la bobine. Celle des extrémités du noyau qui fait face à la plaque vibrante devient, par exemple, pôle nord. La plaque est attirée et se rapproche du noyau.

De *b* à *c*, le susdit courant s'affaiblit, jusqu'à ce que, en *c*, il soit = 0. Le pôle nord disparaît, la plaque s'éloigne du noyau.

De *c* à *d*, la bobine est traversée par un courant d'intensité croissante, dirigé en sens opposé à celui du courant qui passait de *a* à *b*. L'extrémité du noyau la plus rapprochée de la plaque devient pôle sud. *La plaque vibrante est de nouveau attirée.*

De *d* à *e*, le courant en question s'affaiblit, jusqu'à devenir = 0 en *c*. Le pôle sud disparaît à son tour, et la plaque s'éloigne du noyau.

On voit donc que la plaque vibrante exécute à peu près les mêmes mouvements que les feuilles du condensateur non polarisé. Aussi le son qui sort de ce dernier et celui qui est emis par le téléphone non polarisé, bien qu'inintelligibles l'un et l'autre, ont-ils beaucoup d'analogie entre eux. Pour faire rendre des sons à un pareil téléphone, le mieux est d'employer un microphone

Ader, avec 3 éléments de Bunsen; le son, quoique inarticulé, s'entend alors tres bien. Si M. Navez n'a pu obtenir le moindre son d'un téléphone sans aimant, il faut l'attribuer sans doute à ce qu'il opérait avec des courants trop faibles.

Il est à présumer que le téléphone sans aimant, tout comme le condensateur non chargé, reproduira le son à une octave plus haut. J'ai fait différentes expériences pour obtenir cette octave, mais le résultat en est resté douteux. Un téléphone dépourvu d'aimant, et à noyau en fer parfaitement doux, fut placé, derrière un téléphone ordinaire, dans le circuit secondaire d'une bobine d'induction. Avec le circuit primaire communiquaient un microphone de Blake et un élément Leclanché. Appliquant le téléphone non polarisé à l'une des oreilles, et le téléphone ordinaire à l'autre, je faisais souffler dans une petite flûte-accordoir. Il m'a bien semblé que le téléphone non polarisé donnait un son plus élevé ou plus aigu que le téléphone ordinaire, mais je ne puis affirmer qu'il y eût juste une octave de différence entre les deux sons. La différence d'intensité était trop grande pour permettre de juger pertinemment, et cela quoique j'eusse muni le téléphone ordinaire d'un très petit nombre de spires, de sorte qu'il ne possédait qu'une résistance de 13 ohms, tandis que celle du téléphone non polarisé s'élevait à 145 ohms.

Il m'avait toutefois paru, dans ces expériences, que le noyau en fer acquérait une quantité de plus en plus grande de magnétisme rémanent, soit par l'action du magnétisme terrestre, soit par celle des forts courants d'induction qui étaient parfois engendrés, lors de la rupture complète du contact microphonique. En remplaçant le microphone de Blake par un microphone d'Ader avec 3 éléments de Bunsen, je pouvais même, faiblement il est vrai, comprendre dans le téléphone non polarisé tout ce qui était parlé devant le microphone; preuve manifeste qu'il n'y avait déjà pas mal de magnétisme rémanent en jeu. Pour éviter cet inconvénient, je retirai le noyau de fer du téléphone et j'y substituai une petite boîte cylindrique en carton, presque en-

tièrement remplie de limaille de fer. Si dans celle-ci apparaissait du magnétisme rémanent, quelques secousses imprimées au téléphone devaient le faire disparaître immédiatement. Le moyen se montra parfaitement efficace, car maintenant le téléphone ne laissait plus comprendre un seul mot. Ayant, par exemple, fait réciter près du microphone d'Ader notre chant national, je ne pus même le suivre dans le téléphone. En outre, le son était extrêmement faible, plus faible que précédemment, avec le noyau en fer. Lorsque, l'appareil ainsi modifié, je fis souffler dans la flûte-accordoir, devant le microphone d'Ader ou devant celui de Blake, le son du téléphone non polarisé me parut de nouveau plus aigu et plus élevé que celui du téléphone ordinaire. Parfois même je croyais réellement distinguer l'octave supérieure, — mais, dans cette disposition encore, la grande différence d'intensité s'opposait à une évaluation certaine.

Quand, au contraire, le téléphone est aimanté d'une manière permanente, il peut évidemment rendre avec beaucoup d'exactitude les vibrations produites devant le microphone, car tout se borne alors à l'affaiblissement et au renforcement du magnétisme, le renversement de polarité étant entièrement évité, du moment qui l'aimant permanent a une force suffisante. En d'autres termes : l'aimant sert seulement à empêcher l'inversion de polarité. Aussi une aimantation permanente très faible suffit-elle pour donner au téléphone le pouvoir de reproduire la parole articulée.

Cela ressortait déjà assez nettement de l'expérience ci-dessus mentionnée, avec le téléphone à noyau de fer doux. Par surcroît, j'en ai encore fait une autre. D'abord, un téléphone à noyau récemment chauffé au rouge, et sans aimant, était porté à l'oreille: rien de ce qui se disait devant le microphone ne pouvait être compris. Ensuite, un aimant permanent était tenu un instant près du noyau: aussitôt je constatais que celui-ci avait déjà assez de magnétisme rémanent pour faire articuler distinctement, quoique faiblement, le téléphone.

Eu égard à ce qui précède, il y a lieu de se demander s'il

est avantageux que l'aimant polarisant du téléphone récepteur soit pris aussi puissant que possible, ou s'il convient de ne lui donner que tout juste la force nécessaire pour prévenir le renversement de polarité.

Le choix d'un aimant puissant offre, théoriquement, à la fois un avantage et un inconvénient. L'avantage résulte de ce qu'un fort aimant détermine aussi une forte aimantation dans la plaque vibrante, et de ce que l'attraction est proportionnelle au magnétisme de la plaque. Soit m le magnétisme de l'aimant en acier, et m_1 celui de la plaque vibrante; l'attraction sera:

$$K = C m m_1.$$

En admettant que la plaque soit saturée, et que par conséquent m_1 soit constant, on a:

$$d K = C m_1 \, d m.$$

Quant à l'inconvénient du choix d'un aimant très énergique, il consiste en ce que les courants téléphoniques auront d'autant moins d'influence sur le magnétisme du noyau en fer doux, que celui-ci est plus voisin de son point de saturation magnétique. Si le noyau était complètement saturé, les courants ne produiraient absolument aucun effet: $d m$, et par suite $d K$, serait donc $= 0$.

C'est à l'expérience de décider qu'elle disposition sera la plus favorable pour l'obtention du maximum d'effet.

J'ai construit, dans ce but, un téléphone où l'aimant permanent était remplacé par un électro-aimant droit. Ce téléphone avait donc deux bobines: la petite bobine ordinaire pour les courants téléphoniques, à l'extrémité du barreau qui était voisine de la plaque vibrante, puis, sur le reste du barreau, une longue bobine, enveloppée de gros fil.

La petite bobine du téléphone, un microphone de Blake et un élément Leclanché furent placés dans un même circuit, sans emploi de bobine d'induction. La grande bobine fut laissée

provisoirement hors d'action. Aucun renversement de polarité n'était possible de cette manière, aussi le téléphone parlait-il très distinctement.

Je reliai alors un élément Bunsen à la longue bobine, glissée sur le barreau de fer: immédiatement, le son devint beaucoup plus fort.

Lorsque, ensuite, 4 éléments Bunsen furent appliqués à l'électro-aimant, le son conserva la même force qu'il avait avec un seul élément. L'aimant portait, avec 1 élément Bunsen, 55 grammes, avec 4 éléments, 100 grammes; pour ces mesures une plaque téléphonique ordinaire servait de contact.

En l'absence de la pile de Bunsen, donc avec le seul élément Leclanché, et avec le microphone dans le circuit, le noyau de fer était trop faiblement aimanté pour porter la plaque vibrante seule, sans charge supplémentaire.

Bien que cette mesure, en ce qui concerne les valeurs limites, ne prétende pas à une grande exactitude, elle prouve pourtant:

1°. Qu'il ne suffit pas, pour obtenir le maxîmum d'effet, de donner à l'aimant tout juste assez de force pour qu'il puisse empêcher le renversement de la polarité.

2°. Que l'intensité du son ne croît que jusqu'à une certaine limite avec la puissance de l'aimant.

Les mêmes considérations mathématiques qui nous ont fait connaître la forme exacte du mouvement du condensateur, peuvent aussi être appliquées à la détermination du mouvement de la plaque vibrante du téléphone. P représentant le magnétisme permanent du noyau de fer, et μI le magnétisme excité dans ce noyau par un courant I qui parcourt la bobine, l'attraction sera:

$$K = C(P + \mu I)^2.$$

Si le son produit devant le microphone est simple, I varie

conformément à l'expression $a \sin 2\pi \frac{t}{T}$, de sorte qu'on a

$$K = C\left(P + \mu a \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2.$$

Cette forme est tout à fait semblable à celle trouvée ci-dessus pour le mouvement du condensateur. Les résultats que nous avons déduits de cette dernière vaudront donc aussi pour le mouvement de la plaque du téléphone.

Je crois avoir montré, dans ce qui précède, pourquoi la polarisation est nécessaire, tant dans les condensateurs que dans les téléphones. Quoique la question posée au début de cet article se trouve ainsi résolue, je mentionnerai encore une couple d'expériences relatives à l'action téléphonique des condensateurs.

Lorsque j'eus introduit, dans un même circuit, un téléphone, un condensateur et une pile auxiliaire de 10 éléments Bunsen, l'idée me vint d'essayer si la vibration du condensateur produirait aussi un mouvement électrique et donnerait par conséquent lieu à un son dans le téléphone. A cet effet, je fis chanter et parler très près du condensateur, et reconnus alors que tout s'entendait, parfaitement articulé, dans le téléphone, bien que le son eût peu de force. Avec cette disposition, il était donc possible de parler et de répondre alternativement.

Il s'agissait maintenant de préciser la cause du phénomène. Le condensateur fonctionne-t-il comme microphone, ou bien a-t-on affaire à des variations de capacité? Cette question pouvait être résolue très simplement, de la manière suivante.

Le condensateur intercalé dans le circuit avait une résistance de 1248000 ohms, le téléphone une résistance de 240 ohms; quant au reste du circuit conducteur, sa résistance était si faible qu'on pouvait la négliger. Sur le condensateur fut posé une petite

boîte à musique, dont la mélodie s'entendait très distinctement dans le téléphone, placé dans une chambre voisine.

Si le condensateur agit comme microphone, les courants entendus dans le téléphone *traversent le condensateur*: la résistance totale du circuit parcouru par ces courants est alors de 1248240 ohms. Si, au contraire, le phénomène est dû à la variation de capacité, les courants téléphoniques *ne traversent pas le condensateur*; la résistance du circuit n'est alors que de 240 ohms.

Pour décider auquel de ces deux cas on a affaire, il suffit d'introduire dans le circuit une résistance de quelques mille ohms. Si la résistance de la ligne est réellement de 1248240 ohms, l'addition de quelques milliers de ces unités de résistance n'aura pas d'influence appréciable sur l'intensité des courants, et ne fera donc pas varier l'intensité du son émis par le téléphone. La résistance du circuit n'est-elle, au contraire, que de 240 ohms, alors les courants seront fortement affaiblis par la résistance introduite, et, par suite, le son produit dans le téléphone deviendra également beaucoup plus faible.

J'introduisis donc dans le circuit une pile de sélénium de 26000 ohms; il en résulta un énorme affaiblissement du son. Par conséquent, le condensateur n'entrait pas dans la ligne comme résistance, des changements de capacité étaient seuls en jeu.

J'avais obtenu de cette manière un transmetteur électrostatique, et comme, d'autre part, un condensateur peut aussi servir de récepteur, il était à présumer qu'on pourrait parler d'un condensateur à l'autre. Cela réussit effectivement. Deux condensateurs à paraffine, du même modèle que celui décrit précédemment, furent mis en communication avec 36 petits éléments Faure. Quand on chantait ou parlait près d'un des condensateurs, on pouvait tout comprendre dans l'autre, bien que le son fût excessivement faible.

J'obtins un résultat meilleur en disposant les condensateurs parallèlement dans la ligne (fig. 6), disposition où chacun d'eux se chargeait jusqu'au potentiel entier de la pile. Lorsqu'on par-

lait devant *a*, tout s'entendait en *b*, et, quoique faible encore, le son était plus fort que dans l'expérience précédente. *Se* est une pile de sélénium de 26000 ohms, en l'absence de laquelle la majeure partie de l'électricité, émanée de *a*, passerait par la pile, et par conséquent ne se rendrait pas en *b*.

Si une isolation parfaite était réalisable, on pourrait, dans ce système, téléphoner sans pile, puisqu'il suffirait de donner, une seule fois, une charge au condensateur.

Selon M. Dumoncel [1]), M. Maiche aussi a téléphoné en employant un condensateur comme transmetteur. Longtemps avant lui, toutefois, M. Edison [2]) avait déjà montré la possibilité d'un pareil emploi.

---

[1]) *Le Téléphone*, 4e éd., p. 294.
[2]) *Engineer*, 1878, t. XLVI, p. 425.

SUR UN THERMO-RÉGULATEUR

DE CONSTRUCTION TRÈS SIMPLE ET POUVANT SERVIR AUSSI DE THERMOMÈTRE ENREGISTREUR.

PAR

E. H. VON BAUMHAUER.

Pour obtenir des températures constantes au sein d'un liquide ou dans un espace rempli d'air, on a déjà imaginé et mis en pratique divers appareils, dont la plupart agissent en réglant la flamme du gaz employé comme source de chaleur. Tels sont, entre autres, les thermo-régulateurs des professeurs R. W. Bunsen, de Heidelberg, et E. Reichert, de Fribourg, fondés sur la réduction graduelle que le mercure, se dilatant dans un tube thermométrique, détermine dans l'apport de gaz à la lampe [1]); le thermostat de M. N. A. Randolph [2]), où le même résultat est obtenu par la dilatation de l'alcool emprisonné au-dessus d'une couche de mercure, dilatation qui force le métal à s'élever dans un tube étroit et à fermer l'orifice du tube adducteur du gaz; les thermo-regulateurs de MM. Th. Schorer [3]), Jeannel [4]) et Rob. Muencke [5]), où la dilatatiton bien plus considérable de l'air agit de la même manière sur une colonne de mercure. Dans

---

[1]) Poggendorff's, *Annalen,* t. 144, p, 467. — Fresenius, *Zeitschr. für Analytische Chemie*, année 1872.

[2]) *Journal of the Franklin Institut*, 1883, p. 465 — *Zeitschr. der Instrumentenkunde*, 1884, p. 138.

[3]) Fresenius, 1870, p. 213.

[4]) *Journal de Chimie et de Physique*, Serie IV, T. XXV, p. 386.

[5]) Dingler, *Polytechnisch Journal*, T. CCXIX, p. 72.

presque tous ces dispositifs l'extinction complète de la lampe est empêchée par un très petit trou percé dans le tube adducteur et qui, après l'occlusion de l'orifice, laisse encore passer assez de gaz pour entretenir une flamme à peine perceptible et ne reprenant toute sa force que lorsque, à la suite du refroidissement, l'orifice est de nouveau dégagé.

Sur ce même principe, appliqué à la dilatation de l'air, repose aussi le thermo-régulateur très simple dont je me sers depuis assez longtemps déjà, et qui m'a rendu d'excellents services, à la fois comme économie de temps et de gaz; en outre, il offre l'avantage que chacun peut aisément le construire lui-même, qu'il est susceptible de recevoir des formes différentes suivant les besoins, et qu'on peut à volonté en augmenter ou en diminuer la sensibilité.

Fig. 1

Pour simplifier, je me bornerai à décrire, et à figurer au tiers de la grandeur réelle, le petit modèle dont je fais usage pour régler la température des liquides ou des étuves à dessiccation; dans celles-ci, l'eau bouillante, qu'il faut renouveler fréquemment, sous peine de trouver l'étuve à sec et les matières brûlées, est, grâce à cet appareil, avantageusement remplacée par la paraffine ou l'huile.

Dans un tube d'essai ordinaire, *A* (fig. 1), est fixé hermétiquement, au moyen d'un bouchon de liège ou de caoutchouc percé, et mieux encore au moyen de la soudure à la lampe, un tube plus étroit *B*, ouvert aux deux bouts, et étiré en cône à l'extrémité inférieure. L'autre extrémité de ce tube s'adapte, par un manchon à vis, à une pièce coudée en laiton, telle qu'on les emploie généralement dans les conduites de gaz; à la paroi supérieure de cette pièce est foré un trou rond, centré sur le tube inférieur, et garni intérieure-

ment d'un anneau de cuir, dans lequel, au moyen d'un peu de graisse, peut glisser facilement, mais sans livrer passage au gaz, un troisième tube C, encore plus étroit que le second B. L'espace compris entre les tubes A et B, et limité inférieurement par du mercure, est la chambre à air; c'est la dilatation de cet air qui, jointe à la dilatation presque négligeable du mercure, produit l'effet régulateur de l'appareil, et la sensibilité de celui-ci dépend par conséquent du rapport entre le volume de l'air confiné dans la chambre et la section intérieure du tube B. Dans l'instrument que représente la fig. 1, et qui, destiné aux étuves, peut se contenter d'une exactitude d'environ 2° C, le mercure, pour chaque accroissement de température de 1° C, s'élève à peu près de 1 millimètre dans le tube B; or ce tube pouvant conserver le même diamètre dans les appareils plus grands, pourvus d'une chambre à air plus spacieuse, on reste évidemment maître d'augmenter la sensibilité autant qu'on le juge nécessaire. Le tube le plus étroit C, qu'on peut faire monter ou descendre et qui, au moyen du caoutchouc z, amène le gaz à la lampe, est coupé en biais vers le bas et présente, à environ 1 ou $1\frac{1}{2}$ centim. de son extrémité inférieure, un trou très fin o, pratiqué (après la graduation) soit à la lampe, soit à l'aide d'une pointe de diamant.

Pour remplir et graduer l'instrument, on le chauffe, vide et sans le tube C, dans un bain de paraffine ou d'huile muni d'un thermomètre, jusqu'à la température la plus élevée à laquelle on se propose d'employer l'appareil. Arrivé à ce point, on verse dans le tube B, à l'aide d'un petit entonnoir, du mercure pur et préalablement chauffé, en quantité telle que le tube soit rempli à peu près jusqu'au niveau d; la chambre à air se trouve alors sous la pression de une atmosphère, plus la colonne de. L'appareil refroidi, on le place dans un mélange réfrigérant, afin de s'assurer s'il contient assez de mercure pour que, pendant les froids de l'hiver, de l'air ne puisse pénétrer, à travers le mercure, dans la chambre à air, ce qui naturellement rendrait sans valeur la graduation donnée comme il va être dit, au tube C.

Après avoir glissé dans le tube *C* une échelle millimétrique en papier, introduit le tube *C* dans le tube *B*, et relié la pièce coudée *x* à la conduite de gaz et le tube en caoutchouc *z* à la lampe, on chauffe lentement le bain d'eau d'huile ou de paraffine, et, remontant successivement le tube *C*, on détermine chaque fois, d'une part, le point de l'échelle qui correspond au plan *m*, d'autre part, la température marquée par le thermomètre au moment où la lampe s'éteint; d'après ces données on construit alors l'échelle définitive. Il ne reste plus qu'à percer le petit trou *o*, et l'instrument est prêt à fonctionner: le gaz arrive en *x*, traverse l'espace annulaire entre les tubes *B* et *C*, passe par l'extrémité inférieure ouverte du tube *C*, et se rend par le tube en caoutchouc *z* à la lampe. Dès que le mercure soulevé a fermé l'orifice du tube *C*, la flamme n'est plus alimentée que par une très petite quantité de gaz, s'échappant à travers le trou *o*; quand on se sert de lampes de Bunsen, il faut donc avoir soin d'interdire l'accès à l'air, ou du moins d'en laisser entrer si peu que la flamme ne puisse être rabattue.

Fig. 2

Pour empêcher que le tube en caoutchouc *z* ne soit étranglé par un pli, ou ne presse sur le tube *C*, ou enfin ne casse ce tube à la suite d'un choc, on le fait reposer sur une petite poulie, portée sur un gros fil de laiton, qui lui-même est soudé sur la pièce coudée. Si l'on veut régler la position du tube *C* plus exactement que ne le comporte le mouvement à la main, on peut adapter à la pièce coudée le petit appareil représenté fig. 2, dans lequel le mouvement est réglé par une vis à petit pas. Dans la plupart des cas, toutefois, cela est entièrement superflu.

Il est clair que cet instrument doit toujours être maintenu verticalement, puisque, dans la situation horizontale, de l'air sortirait de la chambre, ou y

pénétrerait, ce qui, nous l'avons déjà dit, mettrait hors d'usage la graduation effectuée. Quand il s'agit de faire voyager l'appareil, on pare à l'inconvénient signalé en dévissant la chambre à air de la pièce coudée, et en vissant sur cette chambre un obturateur en fer, auquel est-fixé un gros fil de fer portant à son extrémité inférieure un petit tampon conique en gomme élastique; ce tampon, pressé dans l'extrémité conique du tube *B*, le bouche parfaitement et prévient toute déperdition d'air ou de mercure.

Dans les laboratoires chimiques, physiques et physiologiques, dans les couveuses artificielles, etc., et surtout dans les appareils de chauffage au gaz, dont l'usage devient de plus en plus général, notre thermo-régulateur, grâce à sa simplicité, pourra trouver d'utiles applications.

Enfin, chacun comprendra, sans explications spéciales, que l'instrument peut facilement être transformé en thermomètre enregistreur; la surface du mercure, dans le tube *B*, est assez large pour permettre, en remplacement du tube *C*, l'installation d'un flotteur, qui, par-dessus la poulie dont il a été question, pourra être équilibré au moyen d'un contre-poids.

Il faut remarquer, toutefois, que dans le thermo-regulateur la hauteur de la colonne de mercure est indépendante des variations barométriques, puisque cette colonne supporte seulement la pression du gaz de la conduite. Dans le thermomètre enregistreur, au contraire, il y a à tenir compte des variations de la pression atmosphérique. La correction à faire de ce chef est d'ailleurs assez simple. Elle peut se réduire, tout en conservant une exactitude suffisante, à augmenter ou à diminuer la hauteur thermométrique notée d'autant de millimètres que le baromètre en a marqués au-dessus ou au-dessous de 760 mm.

Soit V_t le volume, en millimètres cubes, de l'air confiné dans le tube *A*, sous la pression *H* (760 mm.) et à la température *t*; *s* la section intérieure du tube *B*, en millimètres carrés, et *h* la colonne de mercure dans te tube *B*; si alors le baromètre *monte* de la quantité Δ, la colonne de mercure du tube *B* sera *déprimée*

approximativement de

$$x = \frac{V_t}{V_t + (H + h + \Delta)\,s}\,\Delta.$$

Puisque Δ est très petit par rapport à H, nous pouvons écrire aussi

$$x = \frac{V_t}{V_t + (H + h)\,s}\,\Delta,$$

et comme la section du tube B peut être prise petite, et la capacité de la chambre à air très grande, de sorte que $(H + h)\,s$ devienne négligeable en présence de V_t, il résultera de l'expression précédente:

$$x = \Delta.$$

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

EQUATIONS DE COULEURS SPECTRALES SIMPLES ET DE LEURS MÉLANGES BINAIRES, DANS LES SYSTÈMES NORMAL (POLYCHROMATIQUE) ET ANORMAUX (DICHROMATIQUES)

PAR

F. C. DONDERS.

I. *Mélanges de rouge* (λ 0.$^\mu$6705) *et de vert* (λ 0.$^\mu$535).

a. Equations avec le Jaune (λ 0,589).

(Avec le concours de MM. Waelchli, Sulzer et Burnham).

En comparant le jaune spectral (environ D) avec des mélanges de rouge et de vert spectraux, Lord Rayleigh [1]) avait remarqué que la proportion de ces composantes, nécessaire pour obtenir l'égalité, variait considérablement chez des personnes différentes. Le mélange qui pour lui-même et pour la plupart des autres donnait du jaune, était pour quelques-uns, notamment pour trois de ses beaux-frères, „désespérément trop rouge, presque aussi rouge que la cire à cacheter rouge". Chez ces personnes, si l'on voulait obtenir du jaune, la proportion du rouge devait être beaucoup diminuée, et pour l'œil ordinaire la couleur était alors décidément verte.

L'examen porta sur 23 hommes, la plupart étudiants du laboratoire. Sur ce nombre, 16 s'accordaient, dans les limites des erreurs d'observation, avec Lord R. Un écart dans le sens indiqué fut trouvé chez 5 des personnes soumises à l'examen: chez les

[1]) *Nature*, 1881, t. XXV, p. 64, — communiqué à l'Association britannique, le 2 sept. 1881.

trois frères (un quatrième frère et trois sœurs étaient normaux) et chez deux autres personnes. C'est là, dit Lord R, „une particularité intéressante de la vision des couleurs, tout à fait distincte de l'achromatopsie". Chez les sujets en question, affirme-t-il, „l'apprécication de petites différences de couleur est aussi nette que dans les cas ordinaires".

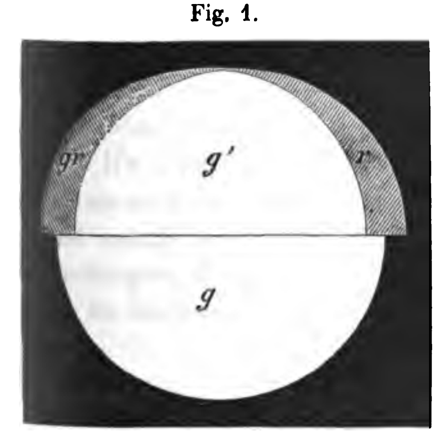
Ce résultat était très inattendu.

Pour répéter les expériences, nous avons fait usage de mon appareil à trois fentes, décrit précédemment [1]): deux fentes couplées, situées l'une à côté de l'autre, et une fente simple, située directement sous les fentes couplées et mobile dans le sens horizontal. La fente simple nous donnait le jaune spectral (ou, à volonté, toute autre couleur), les fentes couplées fournissaient les deux composantes superposées, le rouge et le vert. Les vis de ces fentes sont à portée de la main de l'observateur: en tournant la vis des fentes couplées il obtient l'égalité de couleur, en faisant mouvoir celle de la fente simple il produit l'égalité d'intensité lumineuse. On trouvait donc ainsi, non-seulement la proportion du mélange, mais aussi (par la largeur qu'il fallait donner à la fente simple) l'intensité obtenue I. La somme des largeurs des fentes couplées fut portée à 1 mm, correspondant à 100 sur l'échelle. — La lumière émanait d'une forte flamme de gaz (brûleur de Sugg), entourée d'un cylindre en fer blanc de 80 cm. de hauteur et de 30 cm. de diamètre, flamme dont le sommet et la base étaient interceptés par un diaphragme, de sorte que la partie moyenne constante, haute de 2 cm, trouvait seule accès à un verre blanc dépoli, qui servait de source lumineuse. Après une seconde fente, dont la hauteur et la largeur pouvaient être modifiées, venait un tube court aplati, entouré d'une gaîne en velours un peu plus longue, laquelle par son extrémité s'appliquait directement contre l'appareil à fentes et excluait toute lumière étrangère. Les trois fentes recevaient donc la radiation du verre dépoli, lequel émettait toujours uniformément la même

[1]) Voir: v.d. Weyde, *Methodisch onderzoek der kleurstelsels van kleurblinden*, Utrecht, 1882, p. 18 et suiv.

lumière [1]). Pareillement, de chaque point des fentes la lumière atteignait sans obstacle la surface entière de la lentille collimatrice, et de chaque point du prisme tous les rayons émergents frappaient la lentille collectrice. Entre le prisme et la lentille collectrice sont encore interposés les prismes jumeaux de von Kries et de Frey [2]): deux prismes très minces, réunis par leurs arêtes réfringentes en une ligne horizontale. De cette manière, les trois fentes fournissent six spectres: deux spectres simples et deux paires de spectres se recouvrant en partie; et, de ces spectres, l'un des simples et l'une des paires superposées tombent dans la fente oculaire, à savoir la paire inférieure et le spectre simple supérieur. Les trois autres spectres tombent en dehors de la fente oculaire. L'œil, placé directement devant la fente, reçoit toute la lumière correspondante des trois spectres désignés en premier lieu, celle du spectre simple en direction un peu ascendante, celle des spectres couplés en direction légèrement descendante: cette lumière, restée divergente dans l'œil, forme sur la rétine un cercle (fig. 1) correspondant à la forme de la lentille collectrice, dont la moitié inférieure g apparaît dans la lumière simple, la moitié supérieure g' dans la lumière composée, les deux moitiés n'étant séparées que par une droite horizontale, la ligne de jonction des spectres jumeaux. La différence de direction des rayons verts et des rayons rouges est cause que les cercles ne se recouvrent pas parfaitement

Fig. 1.



1) Lorsque le spectroscope était déplacé, d'un centimètre et même plus, parallèlement au verre dépoli, ou lorsqu'il était dérangé plus ou moins de sa direction exactement perpendiculaire par rapport à ce verre, cela n'exerçait aucune influence sur les équations.

2) *Archiv f. Physiologie*, 1881, p. 336.

et que, par suite, à l'un des côtés déborde un peu le vert *gr*, à l'autre côté le rouge *r*.

Lord R. n'avait pas déterminé d'une manière précise le rouge et le vert employés comme composantes, et pour le jaune spectral il s'était aussi contenté de prendre à peu près D. Voulant obtenir des proportions fixes et comparables, nous résolûmes de partir de longueurs d'onde déterminées et trouvâmes que celles qui correspondent aux raies du lithium, du sodium et du thallium, soit respectivemeut $\lambda\, 0^{\mu},6705$, $\lambda\, 0^{\mu},589$ et $\lambda\, 0^{\mu},535$, convenaient parfaitement. Nous les appellerons dorénavant rouge de Li, jaune de Na et vert de Tl. Elles ont l'avantage d'être faciles à trouver et à contrôler, même avec des appareils simples. Il importe de déterminer très exactement le rouge de Li: vers ce point l'intensité lumineuse varie si rapidement, qu'une différence de $0^{\mu},001$ en longueur d'onde devient déjà très appréciable dans la proportion requise.

En tournant la vis des fentes couplées on obtient les mélanges de rouge et de vert en toutes proportions, et la couleur varie du rouge pur, lorsque le vert $= 0$, au vert pur, lorsque le rouge $= 0$: l'observateur s'arrête à la proportion pour laquelle la couleur est celle du jaune de Na, — seulement un peu moins saturée, soit jaune de Na'. Ensuite il rend les intensités égales, en faisant tourner la vis de la fente simple, puis, s'il est nécessaire, il retouche de nouveau et alternativement la couleur et l'intensité, jusqu'à ce que toutes les deux soient égales. Sur le tambour des fentes couplées peut alors se lire la proportion des composantes, sur celui de la fente simple, l'intensité du jaune correspondant. Par là est trouvée l'équation:

$$\text{x Tl} + \text{y Li} = \text{Q Na}'.$$

Parmi les personnes examinées, 56 appartenaient à la première catégorie de Lord R., 48 du sexe masculin — en majorité étudiants en médecine ou professeurs — et 8 du sexe féminin.

Chez la plupart, les deux yeux furent comparés l'un à l'autre

et, là où se rencontrait une différence considérable, nous faisions instituer les équations pour chaque œil séparément.

Les proportions requises de Tl et de Li varièrent de

$$
\begin{array}{lrll}
 & 31\ \mathrm{Tl} & \supset 69\ \mathrm{Li} = 24.8 & \mathrm{Na}' \\
\text{à} & 23\ \text{„} & \supset 77\ \text{„} = 18 & \mathrm{Na}' \\
\text{moyenne} & 27{,}4\ \text{„} & \supset 72{,}6\ \text{„} &
\end{array}
$$

L'erreur moyenne m_1 (écart moyen à la moyenne générale), dans une série de 10 observations, fut chez

	Donders.	Waelchli.		Burnham.		Sulzer	
	O. S.	O. D.	O. S.	O. D.	O. S.	O. D.	O. S.
Pour la proportion de rouge et de vert.	0,31 %	0,92 %	1,76 %	0,31	0,36	0,48	0,42
Pour l'intensité.	0,41	1,58	1,32	2,1	1,6	0,7	0,4 ;

elle était donc manifestement plus grande pour l'observation de l'égalité d'intensité, $\mathrm{Na}' = \mathrm{Na}$, que pour celle de l'égalité de couleur, $\mathrm{Tl} \supset \mathrm{Li} = \mathrm{Na}$.

Dans 10 observations faites à des jours différents, *une* par jour, les valeurs moyennes trouvées et les écarts susdits furent pour

	Largeurs des fentes, en centièmes de mm.				
	Proportion centésimale.			Intensité.	
	Tl.	Li.	Ecart moyen.	Na'.	Ecart moyen.
Donders ...	29,8	70,2	0,45	24,6	1,27
Engelmann.	25,7	74,3	0,94	23,4	1,8

Ces écarts comprennent toutes les sources d'erreur, aussi celles qui proviennent de la composition et de la combustion du gaz plus ou moins variables d'un jour à l'autre.

Pour pouvoir compter avec quelque confiance sur les résultats de l'ajustement des fentes par des personnes peu exercées, un dessin semblable à la fig. 1, revêtu des couleurs exactes, était d'abord expliqué, puis montré au spectroscope. A la question, si *g'* et *g* étaient ici tous les deux le même jaune que dans le dessin, elles répondaient ordinairement: oui! Elles avaient à dire ensuite, pendant qu'on faisait tourner le tambour, à quel moment *g'* devenait ou rougeâtre ou verdâtre. Et enfin elles devaient tourner elles-mêmes, jusqu'à ce que *g'* fût redevenu du même jaune que *g*. Si ce point se trouvait à peu près au milieu entre les positions où elles avaient déclaré *g'* rougeâtre et verdâtre, l'observation était jugée suffisante. Dans le cas contraire, on recommençait. De la même manière avait lieu la détermination de l'intensité de Na'.

Chez la grande majorité des sujets, la proportion Li: Tl requise est intermédiare entre celles nécessaires pour les yeux de Donders et d'Engelmann. Nous avons trouvé:

Thallium...	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	
chez	6	8	11	10	6	6	6	2	3	1	personnes.

Ces chiffres montrent qu'il n'y a pour ces personnes qu'un seul maximum, correspondant à Tl 28,6, et que toutes appartiennent à une seule et même catégorie, bien qu'elles présentent entre elles des différences plus grandes que l'erreur moyenne pour un seul et même individu.

Sur 68 personnes, il n'y en a qu'une, le Dr. Sulzer, chez qui nous ayons trouvé une différence importante entre

O. D. 30 Tl + 69,5 Li et
O. S. 19,8 Tl + 80,2 Li.

Plus loin, à l'article *d.*, on trouvera une Note de M. Sulzer, dans laquelle il a exposé en particulier cc qui a rapport au sens chromatique de ses deux yeux, comparés entre eux.

En opposition avec les sujets dont il a été question ci-dessus, nous en rencontrâmes d'emblée, parmi nos étudiants, quatre qui, s'écartant beaucoup des limites indiquées, appartenaient évidemment à la seconde catégorie de Lord R. Ils figurent, dans le tableau suivant, sous les nos. 57, 58, 59 et 60, en même temps que 1 et 2, de la première catégorie

		x Tl +	y Li =	Na'	x : y
57	B. étudiant	53	46,7	26,2	0,88
58	S. „	48,7	51,3	26,8	1,05
59	V.D. „	51,6	48,4	29,5	0,94
60	P. „	53,6	46,4	29,6	0,87
1	Donders	29,8	70,2	24,6	2,34
2	Engelmann	25,7	74,3	23,4	2,89

On voit que les quatre premiers cas de ce tableau s'accordent suffisamment entre eux, mais s'éloignent beaucoup des deux derniers. Ils forment donc indubitablement une seconde catégorie. Mais, à part les différences en question, leur sens chromatique est-il normal, comme Lord R. l'admet pour les sujets de son étude? — Nous avons trouvé le contraire. Nos quatre sujets ont tous le sens polychromatique *faible* (se rapprochent du système dichromatique des aveugles pour le vert), ce que le déchiffrement des tableaux pseudo-isochromatiques de Stilling mit immédiatement en évidence, et ce que d'autres épreuves vinrent confirmer. Ce résultat suggérait la présomption qu'un sens polychromatique faible serait propre, en général, aux cas présentant le rapport ci-dessus donné. Pour nous en assurer, nous examinâmes encore quelques personnes, dont la faiblesse du sens chromatique nous était déjà précédemment connue, et quelques autres, qui furent promptement découvertes parmi les étudiants du cours pratique et parmi les élèves du lycée [1]). D'une manière générale, ces nouveaux cas confirmèrent notre attente. Il en est ainsi, par exemple, pour:

---

[1]) Dans cette recherche, deux de nos candidats, MM. Betz et Nolst Trenité, m'ont prêté un concours empressé.

			x Tl ⊃	y Li =	Na'	x : y
61 ...	V.	lycéen ...	67,9	32,1	26,1	0,47
62 ...	's J.	id. ...	49	51	25	1,04
63 ...	F.	id. ...	57.5	42,5	30,3	0,74
64 ...	K.	id. ...	53,8	46,5	26,6	0,86
65 ...	V. A.	id. ...	57,7	42,3	26,7	0,73

Mais nons rencontrâmes aussi quelques cas de sens chromatique faible, pour lesquels l'équation concordait avec celle de l'œil normal; tels sont les suivants:

			x Tl ⊃	y Li =	Na'	x : y
66 ...	G.	lycéen ...	24	76	23,5	3.17
67 ...	V.d.B.	id. ...	28,3	71,7	24,5	2,53
68 ...	V. A.	id. ...	25,6	74,2	20	2,9

Et, inversement, dans un cas, celui de M. Schaefer, professeur de physiologie d'*University-College*, à Londres,

	x Li ⊃	y Tl =	Na'	x : y
O. D.	58,2	41,8	20,4	0.72
O. S.	61,4	38,6	24,2	0,63,

le sens chromatique était à peu près normal. Au total, en effet, et spécialement en ce qui concerne la sensibilité aux passages entre le jaune et le vert, le sens chromatique de M. Schaefer était presque égal à celui de M. Donders; seulement, dans la vision indirecte, on constatait un affaiblissement un peu plus rapide du sens chromatique en s'éloignant de la tache jaune. Les trois frères B., examinés par Lord R., se trouvaient peut-être dans le même cas. Au reste, l'existence d'un sens chromatique faible échappe assez souvent dans un examen plus ou moins sommaire.

Chez les soi-disant aveugles pour les couleurs (système purement dichromatique), la comparaison de Lord Rayleigh n'est plus praticable. Le rouge, le jaune et le vert rentrent pour eux dans une seule et même couleur, leur couleur chaude, et la comparaison entre ces

couleurs et leurs mélanges ne concerne donc que l'intensité et la saturation. La latitude est alors si grande, que la comparaison n'a que peu ou point de valeur. Cela s'applique même aux cas où il existe déjà quelque chose de plus qu'un système purement dichromatique. Quelques sujets, M. Scheltema et M. O. Snellen par exemple, qui dans l'ophthalmo-spectroscope de Glan ne peuvent obtenir du blanc pur au moyen du rouge et du bleu, et qui par conséquent ont un peu plus qu'un système dichromatique, trouvent, pour la comparaison avec le jaune spectral, le mélange 70 Tl + 30 Li aussi bon que 70 Li + 30 Tl. A intensité lumineuse égale, la différence entre le jaune de Na et le vert de Tl est, pour eux, très légère, et la seconde de ces couleurs peut aussi être remplacée en plus ou moins grande partie par du rouge de Li, sans que la comparaison en souffre. Qu'ils sont peu sensibles aux passages du jaune au vert, c'est ce que j'avais déjà reconnu d'une autre manière [1]).

b. Equations des mélanges de rouge et de vert avec les différentes couleurs spectrales intermédiaires.

(Avec le concours de MM. Waelchli, Sulzer et Burnham).

Par la même méthode qui avait servi aux comparaisons avec le jaune de Na, nous avons déterminé les proportions dans lesquelles le rouge de Li et le vert de Tl doivent être pris pour les équations avec toutes les couleurs spectrales situées entre la raie du Li et celle du Tl.

Notre spectroscope était parfaitement adapté à cet ordre de recherches: il n'y avait rien à changer aux composantes, elles restaient le rouge de Li et le vert de Tl; et toutes les couleurs de comparaison étaient obtenues par le mouvement de la fente simple.

Comme résultat d'une *seule série* de déterminations, nous avons trouvé pour:

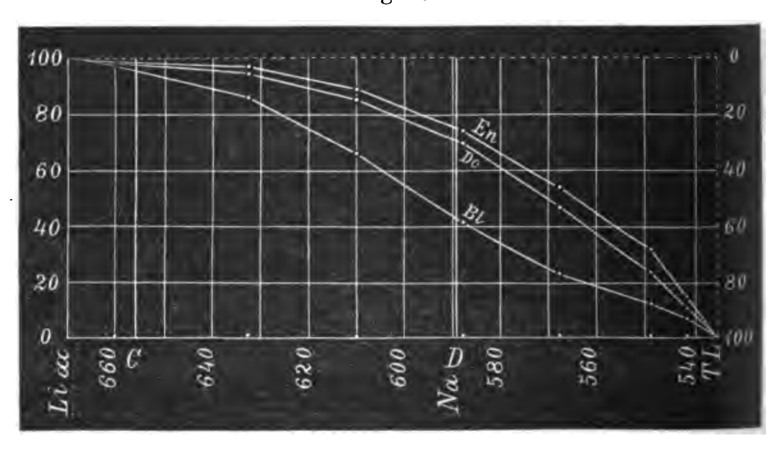
---

1) Voir *Onderz, Physiol. Labor.*, 3e série, t. VII,. p. 95.

Echelle.		Donders.			Engelmann.			Blonk.		
Chiffre.	λ	Tl	Li	Intens	Tl	Li	Int.	Tl	Li	Int.
12.7	0.6705	0	100	100	0	100	100	0	100	100
13	0.660	2.5	97.5	68.9	1.4	98.6	69.9	2.25	97.75	54.25
14	0.633	5.2	94.8	22.6	3.85	96.15	23.1	12.8	87.2	19.65
15	0.610	14.7	85.3	19.8	11.2	88.8	17.95	32.7	67.3	25.9
16	0.588	32.4	67.6	19.8	26.05	73.95	18.85	58	42	23.5
17	0.568	57	43	33.2	45.8	54.2	30.1	77.9	12.1	36.8
18	0.549	78.2	24.4	52.3	67.33	32.66	44.8	88.5	11.5	60.6
18.5	0 541	91.4	8.6	71.5	84.05	15.95	66.2	93.6	6.4	81
18.9	0.535	100	0	100	100	0	100	100	0	100

Ces résultats étaient faciles à mettre en courbes, et une seule et même courbe (fig. 2) suffisait pour Li et Tl, leur somme étant invariablement = 100.

Fig. 2.



Do est la courbe de Donders.
En „ „ „ „ Engelmann.
Bl „ „ „ „ Blonk.

L'abscisse de la figure est le spectre (d'interférence) allant de Li, avec λ 0,6705, à Tl, avec λ 0,535, spectre sur lequel sont

indiquées les longueurs d'onde intermédiaires et, en outre, les raies C et D de Fraunhofer. — La ligne verticale à gauche, qui monte de 0 à 100, est l'ordonnée de Li; la verticale pointillée, à droite, qui descend de 0 à 100, est l'ordonnée de Tl, ayant pour abscisse l'horizontale supérieure (pointillée), égale à l'inférieure. Les ordonnées menées de chaque point de la courbe vers le bas et vers le haut représentent donc les quantités de rouge de Li et de vert de Tl données par les largeurs (respectives) des fentes couplées. Or ces ordonnées se laissent facilement réduire au spectre d'interférence. La dispersion du spectre dioptrique au point Tl est à celle au point Li à peu près comme 1,9 : 1; si le rapport était 1 : 1, comme dans le spectre d'interférence, la fente lumineuse du Tl devrait être 1,9 fois plus étroite. Pour la réduction, sa valeur doit donc être divisée par 1,9, puis la somme de cette valeur réduite et de la valeur du Li doit encore être calculée en $100^{\text{ièmes}}$.

Des courbes de ce genre ont été construites pour un grand nombre de personnes. Les courbes des yeux à sens chromatique normal tombent en majeure partie entre celles de Donders et d'Engelmann, les courbes des yeux à sens polychromatique faible, au voisinage de celle de Blonk [1]).

Les résultats, sous maint rapport intéressants, obtenus par M. Sulzer seront communiqués plus loin (Voir *d.*).

On voit, par ce qui précède, que les comparaisons des mélanges de vert de Tl et de rouge de Li avec le jaune de Na sont décisives pour toutes les couleurs spectrales comprises entre les raies Li et Tl. Cela s'applique (en tant que les observations permettent d'en juger) non-seulement aux courbes d'une seule et même classe, mais aussi à celles des deux classes, dans leur rapport mutuel, — indépendamment des défauts du sens chromatique propres aux divers cas.

Toutes les courbes (voir la fig.) tournent leur côté convexe vers le haut, d'où il ressort que, en partant de la raie Li, la pro-

1) Voir: *Onderz. Physiol. Labor,*, t. VIII, p. ...

portion de vert de Tl s'élève d'autant plus rapidement qu'on approche davantage de la raie Tl. Là où la courbe devient légèrement concave vers le haut, cette concavité disparaît par la réduction du spectre dioptrique au spectre d'interférence.

La régularité des courbes d'une seule série d'observations pour *Do* et *En* (fig. 1) et l'accord des deux séries, une ascendante et une descendante, pour M. Sulzer (voir plus loin *d.*) témoignent de la grande exactitude de la méthode.

c. Explication de la différence des deux catégories de Rayleigh.

Par nos déterminations (*a*, p. 306) de x Li ⊃ y Tl = Q Na′ nous avons trouvé que, dans la *première* catégorie, celle des yeux normaux, x : y variait

de	69	: 31	=	2,3	:	1
à	77,8	: 22,2	=	3,33	:	1
moyenne	72,6	: 27,4	=	2,65	:	1,

dans la seconde catégorie, constituée en général par des cas de sens chromatique faible,

de	51,3	: 48,7	=	1,053	:	1
à	32,1	: 67,9	=	0,473	:	1
moyenne	45	: 55	=	0,82	:	1.

Pour 0 Tl il faut donc, en cas de sens chromatique normal, 2,65 Li, en cas de sens chromatique faible, seulement 0,82 Li; en d'autres termes, dans le premier cas, 1 Tl est neutralisé par 2,65 Li, dans le second, par 0,82 Li.

A quoi tient cette énorme différence?

La première idée qui nous vint fut celle d'une différence des intensités relatives de Li et de Tl. Chez les aveugles pour le vert, l'intensité du vert spectral est, en effet, relativement faible, et comme la faiblesse du sens chromatique se trouve sur la voie qui conduit à la cécité pour le vert, il y avait quelque raison de présumer

que, dans ce cas de faiblesse aussi, le rapport des intensités de Li et de Tl serait au détriment de Tl. L'expérience, toutefois, ne confirma pas cette conjecture. Sur 10 yeux à sens chromatique normal et 10 à sens chromatique faible nous déterminâmes le rapport des intensités relatives de Na: Li et de Na: Tl, puis, au moyen de ces deux rapports, fut calculé celui de Tl: Li.

Le tableau ci-dessous contient les résultats.

pour le sens chromatique normal.				pour le sens chromatique faible.			
NOM.	Na 10 = Li	Na 10 = Tl	Tl 1 = Li	NOM.	Na 10 = Li	Na 10 = Tl	Tl 1 = Li
E. . . .	54.6	25.5	2.1	B. . . .	45	23.6	1.9
D. . . .	60.8	19.8	3	V. D. .	68.8	20.4	3.4
B. . . .	49.7	21.9	2.3	S. . . .	77.4	32.8	2.3
N. T.. .	52.5	21.2	2.5	V. A. .	72	26	2.8
D. . . .	53.3	25	2.1	S. . . .	69.9	20.4	3.4
C. . . .	60.5	30.6	2	s' J. . .	81	27	3
E. . . .	53	25.4	2.1	V. P. .	61.1	19.5	3.1
K. . . .	26.9	17.3	1.6	F. . . .	77.5	22.5	3.4
H. . . .	32.4	19.1	1.7	V. H. .	66	26	2.5
V. L.. .	43.2	21.4	2	W. . .	67	31.5	2.1
Moyenne	48.7	22.7	2.14	Moyenne	68.5	24.9	2.79

Il ressort de ces chiffres que, pour le sens chromatique normal, l'intensité de 1 Tl est en moyenne égale à celle de 2,14 Li, pour le sens chromatique faible, à celle de 2,79 Li. — Le tableau nous apprend, en outre, que la différence des deux catégories ne réside pas tant dans le rapport des intensités de Na : Tl que dans celui de Na: Li.

Le rapport des intensités Tl: Li a été obtenu, comme nous l'avons vu, d'une manière indirecte, savoir, en comparant Li et Tl, chacune séparément, à Na. La méthode directe a fourni des résultats à peu près semblables.

Chez 15 personnes à sens chromatique normal, nous avons trouvé:

	q Li : q′ Tl			
Méthodes :	min.	max.	moyenne	m_1
indirecte	1,94	3,3	2,53	0,44
directe	1,8	3,7	2,64	0,52

De même que pour le sens chromatique normal et le sens chromatique faible, nous avons aussi déterminé le rapport des intensités de Tl: Li chez 10 aveugles pour le vert et chez 10 aveugles pour le rouge; nous communiquons ci-dessous les résultats de ces déterminations, qu'on pourra comparer à ceux des précédentes:

aveugles pour le rouge.				aveugles pour le vert.			
NOM.	Na 10 = Li	Na 10 = Tl	Tl 1 = Li	NOM.	Na 10 = Li	Na 10 = Tl	Tl 1 = Li
C. . . .	360	13.1	27.5	v. d. S.	65.2	32.6	1
G. . . .	232	16.4	14.1	K. . . .	68.2	26.8	2.5
E. H. . .	327	11.1	29.4	B. S. .	66.9	37.1	1.8
H. W.N.	283	14	20.2	H. . . .	62.5	26	2.4
T. K. . .	277	15	18.4	v. d. V.	66.7	26.3	2.5
v. d. W.	295	8.7	33.9	v. L. .	65	19	3.4
E. . . .	240	8	30	H. . . .	68.5	23.5	2.9
W. . . .	296	10.4	28.4	I. . . .	59.5	17.5	3.4
I.	217	11	19.7	B. . . .	31.7	17.2	1.8
H. . . .	240	14.2	16.9	v. D. .	84.2	19.6	4.3
Moyenne	276	12.19	23.85	Moyenne	63.84	24.56	2.7

Nous trouvons donc

chez les aveugles pour le rouge Li : Tl en moyenne = 23,8

" " " " " vert " " " " = 2,7

On voit que, pour les derniers, le rapport des intensités, tant de Na : Li que de Na : Tl, et par conséquent aussi de Tl : Li, concorde assez bien avec celui qu'on trouve en cas de sens chromatique normal. Une forte et constante opposition est offerte, au contraire, par les rapports d'intensité chez les aveugles pour le

rouge. Aussi les intensités lumineuses relatives de Li, Tl et Na suffisent-elles pour caractériser les deux formes de sens dichromatique.

S'il est prouvé, par les résultats qui viennent d'être communiqués, que la différence entre les deux catégories ne dépend pas du rapport Tl : Li, l'explication peut difficilement être cherchée ailleurs que dans un développement relativement faible de la valence verte dans le Tl, comparé à celui de la valence rouge dans le Li. Le rapport de ces valences détermine alors celui des quantités de Tl et de Li qui se neutralisent.

Après avoir reconnu que, pour les yeux de la première catégorie, le rapport x : y est en connexion avec la place du jaune simple dans le spectre (voir *d*), j'ai examiné jusqu'à quel point cette place a aussi de l'influence sur x : y en cas de sens chromatique faible. Le résultat a été qu'il n'y a pas à tenir compte d'une pareille influence. Les personnes de la seconde catégorie indiquent dans le cercle chromatique le même jaune que le jaune simple, et dans le spectre, à de rares exceptions près, un jaune qui n'est pas loin de la raie D.

d. Explication des différences individuelles dans la première catégorie, celle du sens chromatique normal.

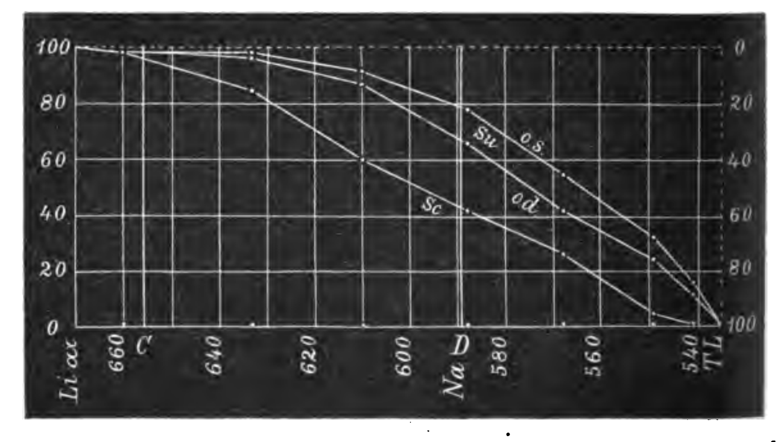
Les différences qui, en cas de sens chromatique normal, existent dans le rapport x : y des coefficients de l'équation x Li $\supset$ y Tl = Q Na′ oscillent de 69 : 31 à 77,8 : 22,2 , valeurs qui sont à peu près entre elles comme 2 : 3.

Nous devons maintenant rechercher à quoi tiennent ces différences. La voie à suivre nous a été indiquée par les cas où, chez la même personne, on a trouvé pour chacun des deux yeux un rapport x : y différent.

A ce point de vue, le cas du Dr. Sulzer, dont les deux yeux représentent à peu près les deux extrêmes du sens chromatique normal, a été particulièrement intéressant, comme on va pouvoir en juger.

a. *Note* du Dr. Sulzer. „Lors de l'établissement de l'équation x Tl $\supset$ y Li = Q Na', des différences notables furent révélées, par rapport aux quantités x et y, entre les deux yeux; ce phénomène existait peut-être chez la plupart des observateurs à vue normale, mais chez aucun autre il n'atteignait des proportions aussi considérables, ce qui détermina à soumettre les deux yeux à un examen comparatif. Lorsque le jaune spectral et le jaune composé, qui pour l'œil droit avaient exactement la même teinte et la même intensité, étaient contemplés de l'œil gauche, le jaune composé paraissait, il est vrai, un peu moins lumineux et un peu moins saturé, mais de même teinte que pour l'œil droit; le jaune spectral, au contraire, contrastait distinctement, par un ton orangé, avec le jaune composé. Pour avoir l'équation relative à l'œil gauche, la relation 30,5 Tl $\supset$ 69,5 Li = 23,04 Na' devait être changée en 19,8 Tl $\supset$ 80,2 Li = 19,95 Na'. Une différence analogue existe entre les deux yeux, à un degré décroissant vers les deux côtés du spectre, pour les éqnations de toutes les couleurs comprises entre Li et Tl: c'est ce que montrent clairement les deux courbes *o. s.* et *o. d.* de la fig. 3 (voir fig. 2).

Fig. 3.



Un examen plus spécial a fait voir que le phénomène dépend de ce que, dans la partie chaude du spectre, à des longueurs d'onde égales répondent des sensations qui pour les deux yeux

diffèrent en teinte, en intensité et en saturation, tandis que, dans la partie froide, la différence est bornée à l'intensité et à la saturation. Le phénomène se produisait aussi avec les flammes des métaux correspondants (Li, Tl, Na), ainsi qu'avec la lumière transmise par des verres à colorations correspondantes, tandis que les matières colorantes opaques provoquaient dans les deux yeux des sensations égales.

M. Sulzer a cherché de trois manières différentes à évaluer les longueurs d'onde qui correspondent respectivement, dans les deux yeux, à des sensations égales.

1°. En déterminant pour chaque œil, à la fente simple du spectroscope double, la situation des couleurs simples.

2°. En determinant pour chaque œil, au moyen du spectroscope double, les couleurs spectrales simples qui répondent aux mêmes mélanges de Tl et de Li.

3°. Par le déplacement de deux spectres égaux (l'un correspondant à l'une des fentes couplées, l'autre à la fente simple du spectroscope double tourné de 90°), spectres projetés l'un à côté de l'autre, avec interposition d'un diaphragme occupant le plan sagittal, sur un écran, et dont l'un affectait l'œil droit, l'autre l'œil gauche; ainsi que par le déplacement des deux images superposées d'un seul et même spectre, images produites par des prismes égaux, placés devant les deux yeux et ayant tous les deux leur angle réfringent tourné soit vers le haut, soit vers le bas.

Les valeurs moyennes des résultats obtenus dans la première série de déterminations sont les suivantes:

	Jaune simple		Vert simple.		Bleu simple.	
	Oeil droit.	Oeil gauche	Oeil droit	Oeil gauche.	Oeil droit.	Oeil gauche.
λ	0,587	0,577	0,538	0,532	0,485	0,485

L'écart moyen à la valeur moyenne était, dans le jaune, de 0,0005 λ pour l'œil droit, de 0,001 λ pour le gauche; dans le vert simple, de 0,002 λ pour l'œil droit, de 0,0009 λ pour le

gauche ; enfin, dans le bleu simple, de 0,002 λ pour les deux yeux.

Les valeurs moyennes des résultats de la comparaison de différents mélanges de Tl et de Li avec les couleurs spectrales intermédiaires, résultats obtenus par chaque œil par une série ascendante et une série descendante, sont contenus dans le tableau suivant:

		Oeil droit.		Oeil gauche.	
Tl	⊃ Li	Intensité.	λ	Intensité.	λ
10	90	20.3	0.613	17.5	0.6085
20	80	15.3	0.602	16.7	0.593
30	70	22.0	0.5892	20.2	0.578
40	60	21.5	0.581	22.6	0.573
50	50	31.2	0.5745	29.5	0.563
60	40	31.0	0.567	35.0	0.5585
70	30	44.3	0.5585	44.6	0.5525
80	20	47.0	0.5525	53.1	0.547
90	10	53.5	0.547	65	0.543

Les nombres de la troisième et de la cinquième colonne montrent, pour chacun des deux yeux, comment se comportent les unes par rapport aux autres les intensités des mélanges et les longueurs d'onde qui leur correspondent par la couleur.

La comparaison directe de deux spectres juxtaposés et la comparaison des images doubles, exécutées pour le même rouge, le même jaune, le même vert et le même bleu, ont donné des résultats qui confirment ceux des comparaisons indirectes, mais qui, par suite de l'exactitude moindre des méthodes de mesure (mesure directe des déplacements nécessaires pour la juxtaposition de couleurs égales), étaient affectés d'erreurs moyennes plus fortes.

L'intensité du jaune spectral est à peu près la même pour les deux yeux. A partir de ce point, et des deux côtés, l'intensité s'affaiblit plus rapidement pour l'œil gauche que pour l'œil droit,

et cela, du côté chaud, jusqu'à l'extrémité du spectre, du côté froid, environ jusqu'à λ 0,5325, point au-delà duquel l'intensité pour l'œil gauche reste d'abord constante, puis augmente légèrement.

Pour Tl et Li, les valeurs moyennes des quantités qui correspondent à 10 Na, valeurs déduites d'un grand nombre d'observations faites à des époques différentes, s'élèvent à:

o. d. 10 Na = 12,5 Tl = 30,8 Li
o. s. 10 „ = 14,3 „ = 56,6 „

Quant aux intensités dans le reste du spectre, la marche en est indiquée dans le tableau suivant, duquel on pourra déduire, par réduction, la marche des différentes intensités par rapport à Na:

10 Tl (λ 0.535) =

λ	O. D.			O. S.		
	↓	↑	moy.	↓	↑	moy.
0.692	110.8	110.8	110.8	149.2	148.5	148.4
0.660	39.0	43.2	41.1	63.4	65.8	64.6
0.633	14.9	14.7	14.8	18.9	18.0	18.45
0.610	8.4	8.7	8.55	11.2	11.0	11.1
0.5892	7.9	8.1	8.0	9.8	10.2	10.0
0.5884	7.5	7.8	7.65	8.9	8.9	8.9
0.5685	9.1	8.7	8.9	10.6	10.8	10.7
0.5495	8.5	8.3	8.4	9.0	8.3	8.65
0.5325	10.8	10.9	10.85	9.8	9.4	9.6
0.5195	17.2	16.1	16.65	13.1	12.7	12.9
0.506	23.9	24.2	24.05	19.8	21.1	20.45
0.495	48.6	46.2	47.4	41.2	38.1	39.65
0.485	74.1	78.2	76.15	64.1	61.8	62.95

Jusqu'au bleu-verdâtre il n'existe pas de différence de saturation pour les deux yeux; à partir de là, la saturation de l'œil gauche devient plus faible que celle de l'œil droit, et dans l'indigo elle n'est plus que les $\frac{2}{3}$ ou la $\frac{1}{2}$ de cette dernière.

Le rapport des intensités d'un mélange de Tl et de Li à la

somme des intensités des composantes est à peu près le même pour les deux yeux, ainsi qu'il résulte des coefficients qui seront donnés plus loin (*f*) pour les longueurs d'onde comprises entre Tl et Li.

A intensité égale (fente simple du spectroscope double = 100 = 1 mm), le spectre, au côté chaud, devient visible pour l'œil droit plus tôt que pour l'œil gauche. La différence est d'environ 0,010 λ. Au côté froid, le spectre commence à disparaître vers une longueur d'onde qui est la même pour les deux yeux.

Les deux yeux possèdent, malgré une myopie de 3,5 à droite et de 2 à gauche, leur pleine acuité visuelle et présentent aussi, sous tous les rapports autres que ceux dont il a été question, un état entièrement normal.

La sensibilité aux légères différences de jaune et de vert est, pour les deux yeux, plus grande que d'ordinaire; plusieurs séries d'observations faites à ce sujet (avec les prismes liquides doubles, par conséquent *pas* avec des couleurs spectrales, Donders) montrent dans l'œil gauche une sensibilité un peu plus grande aux différences les plus faibles, de telle sorte, toutefois, que par la fixation binoculaire le discernement devient encore plus facile que par la fixation monoculaire de gauche.

Les recherches dont il vient d'être rendu compte nous apprennent que les impressions lumineuses produites par les mêmes longueurs d'onde peuvent, pour les deux yeux d'un même individu, présenter des écarts quant au ton, à l'intensité et à la saturation. Comme ces deux yeux montrent, dans la comparaison de Tl et Li avec Na, les mêmes différences que les yeux d'individus différents, il est probable qu'entre ces derniers peuvent aussi exister les susdits écarts.

Les particularités qu'offrent les deux yeux de Sulzer sont, en résumé, les suivantes. Le spectre, qui pour l'œil droit commence un peu plus tôt que pour l'œil gauche, atteint pour le premier, près de la raie du lithium, presque deux fois autant d'intensité que pour le second. Les intensités deviennent à peu près égales près de la raie du sodium, où elles atteignent en outre leur

maximum; à partir de ce point, les intensités décroissent plus rapidement pour l'œil gauche que pour le droit jusqu'au vert-bleuâtre, puis, après une zone d'intensité égale, les couleurs deviennent un peu plus lumineuses pour l'œil gauche. Pour la saturation, les rapports sont inverses. A côté d'une petite différence en faveur de l'œil droit dans la partie chaude du spectre, nous trouvons pour cet œil, à partir du vert-bleuâtre, une saration rapidement croissante et atteignant vers la raie du strontium le double de la saturation pour l'œil gauche. Le plus inattendu, toutefois, c'est la différence du ton, en vertu de laquelle le jaune pur de l'œil droit, en λ 0,589, paraît orangé à l'œil gauche, tandis que le jaune pur de l'œil gauche se trouve près de λ 0,577.

La manière dont le ton se comporte dans la partie chaude du spectre de l'œil gauche, comparativement au spectre de l'œil droit, se laisse caractériser brièvement en disant que, pour l'œil gauche, le côté chaud du spectre est déplacé vers le côté froid, le maximum du déplacement se trouvant près de la raie Na.

Le spectre individuel de l'œil gauche montre, dans la comparaison des couleurs composées avec les couleurs spectrales, sous le rapport des proportions requises des composantes, un caractère diamétralement opposé à celui qui existe en cas de sens chromatique faible, caractère qui se trouve confirmé aussi dans la sensibilité aux différences de vert et de jaune.

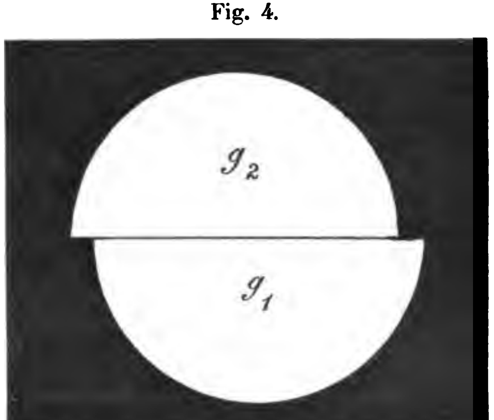
b. *La situation du jaune dans le spectre.* Des quatre couleurs simples de Leonard de Vinci, le jaune, qui ne forme dans le spectre qu'une bande étroite, à la limite du rouge et du vert, est la plus nettement caractérisée. Aussi la longueur d'onde, qui y correspond, se laisse-t-elle déterminer avec une exactitude suffisante. Différentes méthodes ont été essayées et comparées entre elles:

1. Spectroscope avec oculaire, l'œil suivant les couleurs qui apparaissent dans la fente oculaire quand on meut la fente lumineuse.

2. Spectroscope sans oculaire, l'œil, appliqué à la fente ocu-

laire, suivant les changements de couleur que présente, lors du mouvement de la fente lumineuse, le demi-cercle inférieur (fig. 4 g_1).

Fig. 4.



3. Comme 2, sauf que le jaune g_1 de la fente mobile est comparé à un jaune g_2, librement choisi, d'une des fentes couplées.

Nous avons, en général, donné la préférence à la méthode 1; 3 est plus compliquée, sans être beaucoup plus exacte; 1 est moins exacte que 2. La méthode 3 a toutefois servi à examiner jusqu'à quel point l'intensité, qui pouvait être modifiée en sens opposé pour les deux demi-cercles, a de l'influence [1]). La méthode 1 trouve son application lorsque la source lumineuse est faible.

Quand on veut déterminer la situation du jaune, il importe surtout que la rétine soit à l'état neutre. On doit préluder à la détermination par un court séjour dans les ténèbres, ou dans une chambre grise, ne recevant que la lumière d'un ciel couvert, tamisée par du verre blanc dépoli. Toute lumière étrangère, notamment celle de la flamme de gaz qui fournit le spectre, doit être soigneusement exclue de la chambre. Le soir, travaillant à la lumière artificielle, on amène une teinte fausse (trop rouge).

L'état neutre obtenu, on montre dans le spectroscope le jaune moyen (environ λ 0.581 μ). Pour beaucoup de personnes ce jaune est du jaune pur, d'autres le disent verdâtre au rougeâtre;

---

1) L'influence de l'intensité a été trouvée faible: un jaune gai ne s'obtient qu'à une intensité assez grande; quand elle est faible, le ton devient gris, sans changement de couleur proprement dit; en cas d'intensité grande, la limite au côté vert devient moins tranchée.

en imprimant de petits mouvements lents à droite et à gauche, d'une amplitude de plus en plus réduite, toutes finissent par trouver les limites où la teinte tire un peu sur le rouge ou sur le vert, et entre ces limites elles fixent leur jaune. Si alors, après une demi-minute de repos, elles déclarent la couleur bonne, leur détermination est admise. Il est remarqnable avec quelle force, durant le mouvement, le contraste se fait sentir, non-seulement vis-à-vis d'un jaune de comparaison, comme dans la méthode 3, jaune qui incline alors alternativement au vert et à l'orangé, mais aussi comme changement de la couleur — jugée seule, en elle-même. Si elle est verdâtre, et qu'on tourne jusqu'au jaune vrai, elle prend une teinte orangée, pour ne faire place au jaune qu'après un instant d'attente; réciproquement, elle prend une teinte verte, lorsque primitivement elle inclinait à l'orangé. C'est un point auquel il faut faire attention, pour amener la teinte exacte. L'essentiel est: tourner lentement et, après quelques instants de repos ou de rafraîchissement au verre dépoli, contrôler.

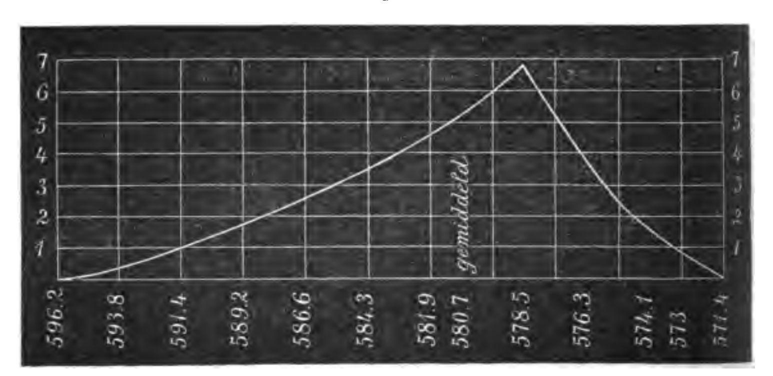
Obtenues de cette manière, les déterminations ne donnent qu'un faible écart à la moyenne. Pour moi, dans différentes séries, il était de λ 0,0002 à λ 0,0009; pour M. Engelmann, de λ 0,0004 à λ 0,0008; pour d'autres, il n'était guère plus fort. Les moyennes relatives à des jours différents présentent des écarts un peu plus grands, évidemment parce qu'à des jours différents la rétine n'atteint pas le même degré de neutralité. Ces moyennes ne variaient toutefois pour moi que de λ 0,5885 à λ 0,5903, pour M. Engelmann de λ 0,5795 à λ 0,5812, ne s'éloignant donc que de λ 0,0012 à λ 0,0013 de la moyenne générale, de sorte que, pour l'objet que nous avions en vue, elles étaient parfaitement suffisantes.

Or, chez la plupart des observateurs moins exercés, l'erreur qui affecte les déterminations n'atteint pas des proportions beaucoup plus fortes.

La détermination a été faite, de la manière indiquée, sur 111 yeux, appartenant à 76 personnes. Pour la longueur d'onde

la plus petite on a trouvé λ 0,572, pour la plus grande λ 0,594, moyenne λ 0,582.

Fig. 5.



La fig. 5, ci-dessus, donne un aperçu des résultats. Les abscisses marquent les longueurs d'onde, les ordonnées le nombre des cas; le maximum de ce nombre correspond à λ 0,579, tandis que la longueur d'onde moyenne est = λ 0,5821. Evidemment tous ces cas forment une seule catégorie. Rappelons que chez M. Sulzer le jaune a été trouvé pour l'œil droit en λ 0,589, pour l'œil gauche en λ 0,577, — donc, pour l'un et l'autre, à peu de distance des limites respectives de la courbe.

c. *Relation entre la situation du jaune et la proportion de* Tl: Li, x: y. Après que M. Sulzer eut obtenu les résultats ci-dessus mentionnés (voir *a*, p. 318), la situation du jaune fut déterminée aussi dans des cas de sens chromatique égal des deux yeux, parce qu'il était à croire que, dans ces cas également, la proportion x : y serait en connexion avec la situation du jaune. Cette présomption fut immédiatement confirmée par la détermination de la situation du jaune chez quelques personnes pour qui le rapport x : y nous était déjà connu de date antérieure (v. p. 306). C'est ainsi que

W. . . .	pour Li 69 :	Tl 31.	, avait le jaune en	λ	0.5911
K. . . .	„ „ 69 :	„ 31.	„ „ „	„ „	0.5910
D. . . .	„ „ 70.2	„ 29.8	„ „ „	„ „	0.5892
D. . . .	„ „ 71.7	„ 28.3	„ „ „	„ „	0.588
E. . . .	„ „ 74.3	„ 25.7	„ „ „	„ „	0.5797
E. . . .	„ „ 74.8	„ 25.2	„ „ „	„ „	0.5764
N. T. .	„ „ 77.1	„ 22.9	„ „ „	„ „	0.5761
H. . . .	„ „ 77.8	„ 22.2	„ „ „	„ „	0.572

Plus tard, les deux mêmes déterminations ont encore été faites, dans une seule et même séance, chez 8 autres personnes, ce qui nous a donné:

NOM.	I			II	III			IV	
	Li ⊂ Tl = Na′			Jaune λ	Li ⊂ Tl = Jaune			10 Na	
								= Li	= Tl
S.	69.3	30.7	25.9	0.590	71.1	28.9	23.9	70	19.2
H. . . .	70.5	29.5	24.5	0.587	70	30	24	57	29.2
V. L. .	71.1	28.9	24.2	0.5845	68.3	31.7	22.6	45	25.5
H. . . .	71.9	28.1	24.9	0.584	67.7	32.7	27.6	52.7	15.3
F. E. . .	73	27	22.4	0.586	69	31	24.3	46	9.4
P. E. . .	73.8	26.2	23	0.5825	69.1	30.9	26.6	67.5	16
H. . . .	75	24.8	21.1	0.585	71.8	28.2	22.9	?	13
D. K. .	76.3	23.7	23.7	0.583	72	28	23.4	29.7	12.7

Les colonnes I et II confirment de nouveau la connexion du rapport x : y, qui entre dans l'équation de Na, avec la situation du jaune. A première vue, une pareille connexion semble nécessaire. Plus le jaune se porte vers le côté du vert, plus Na se rapprochera de l'orangé et moins il faudra de Tl dans l'équation de Na. La relation, toutefois, n'a pas ce degré de simplicité. Si, la sensation de Na changeant, celles de Tl et de Li restaient les mêmes, le raisonnement serait exact. Mais il n'y a pas à compter sur cette constance. Puisque, comme l'a trouvé M. Sulzer, le changement de place du jaune entraîne celui du vert, la couleur de Tl, qui est située entre le jaune et le vert, ne restera

pas non plus liée à son siège, et un déplacement de Li, dans lequel changera assez rapidement, sinon la couleur, au moins l'intensité, est également à prévoir, lorsque le jaune simple ne coïncide pas avec Na. Or, de ces déplacements doivent résulter des changements dans la relation, lesquels effectivement ne font pas défaut dans les tableaux (p. 327).

Si maintenant nous formons l'équation du jaune, c'est-à-dire, Tl ⊃ Li = jaune, — le résultat ne manque pas d'intérêt. Il est manifeste, en effet, que le rapport x : y approche alors pour tous les yeux de celui où le jaune coïncide sensiblement avec Na, c'est-à-dire, de Tl 30 : 70. C'est ce que nous voyons chez M. Sulzer, qui dans l'équation de Na a pour son œil droit 31 Tl, pour son œil gauche seulement 21, tandis que dans l'équation du jaune, comme le montrent les courbes (fig. 3), il obtient pour son œil droit (le jaune en λ 0,588) 33,5 Tl, pour son œil gauche (le jaune en λ 0,577) 33,2 Tl. — Les courbes relatives à Donders et à Engelmann apprennent la même chose. Pour Na, les quantités de Tl sont chez eux respectivement = 29 et 26; pour leur jaune respectif (λ 0,589 chez D., 0,581 chez E.), elles sont = 29 et 30: la différence est donc réduite à 1. Des expériences directes, avec observations alternatives, dans des circonstances égales, ont donné, pour les moyennes de 5 déterminations:

	Tl ⊃ Li	jaune en	Tl ⊃ Li = jaune
Donders . .	29,71 70,29 = Na	0,589	29,71 70,29 = „
Engelmann.	25.75 74,25 = Na	0,581	30 70 = „

Ainsi qu'il résulte de ces chiffres, dans l'équation Na d'E. le mélange est, pour mon œil, vert comparativement au jaune spectral de Na, et dans son équation du jaune le mélange est pour moi jaune, ou même, à côté de la couleur spectrale pour moi verte, jaune d'or; tandis qu'E., dans mes équations de Na et du jaune (égales l'une à l'autre), voit le mélange également en jaune, la couleur spectrale juxtaposée en orangé.

Le même témoignage est rendu par les observations (col. III

comparée à col. I) du second tableau de la page 327, observations qui peuvent être regardées comme très exactes. On voit qu'ici, dans les équations de Na, les proportions varient (la situation du jaune allant de λ 0,59 à λ 0,5825) de 30,7 : 69,3 à 23,7 : 76,3, tandis que dans les équations du jaune (à part H., qui donne 32,7), elles n'oscillent qu'entre 31,7 : 68,3 et 28 : 72, et ne s'éloignent donc pas trop de 30 Tl, proportion qui est à peu près atteinte là où le jaune coïncide sensiblement avec Na.

Ce résultat est intéressant en ce qu'il rend compte, au moins partiellement, de ce fait inattendu : qu'en premier lieu M. Sulzer, chez qui Na était orangé pour l'un des yeux et jaune pour l'autre, voyait par l'un et l'autre dans des teintes sensiblement égales les pigments jaunes opaques, et qu'ensuite, dans mon cercle de couleurs pigmentaires, formé de bandes rayonnantes de différences également perceptibles, tous, sans exeption, indiquaient la même bande comme jaune le plus parfait, n'importe où ils indiquaient leur jaune dans le spectre. De cela, dis-je, les résultats obtenus rendent compte: en effet, les pigments en question contiennent relativement peu de jaune spectral, mais beaucoup d'un jaune formé par des mélanges de couleurs verdâtres et rougeâtres: or, pour ces mélanges, tous les yeux ont, comme le montre le tableau, à peu près la même couleur, quelques-uns même (H. et D. K.) une couleur rougeâtre compensatrice.

e. Les plus petites différences perceptibles du jaune et des couleurs contiguës, pour le sens chromatique normal et anormal.

Ainsi que je l'ai déjà dit incidemment ci-dessus (p. 317), le coefficient Li : Tl de la *seconde* catégorie n'est *pas* en rapport avec la situation du jaune. Sur le cercle chromatique, les personnes qui appartiennent à cette catégorie indiquent comme jaune la même bande qu'indiquent celles de la première. Et comme jaune spectral, toutes, à une seule près (qui chercha son jaune en Tl), choisirent le jaune au voisinage de D. L'écart m_1 est toutefois plus grand

chez elles, et les déterminations moyennes faites à des jours différents présentent aussi des divergences plus notables. C'est ainsi que chez B., étudiant en médecine, qui, nonobstant son équation Li 46,7 + Tl 53,3 = Na, possède un sens chromatique assez parfait, j'ai trouvé, à des jours différents, de λ 0,595 à λ 0,583, en moyenne λ 0,590, et dans un même jour, pour une série de déterminations, $m_1 = \lambda\ 0{,}0022$.

Tout cela concerne la détermination libre du jaune pur. Une autre détermination, dont nous allons maintenant nous occuper, est celle de la plus petite différence perceptible. M. Mandelstamm [1]) et M. Dobrowolsky [2]) l'ont déterminée chacun pour soi et ont trouvé, en fractions des longueurs d'onde respectives, pour

	Mandelstamm.	Dobrowolsky.
C	1 : 106	1 : 248
entre C et D		1 : 331
D	1 : 465	1 : 772
entre D et E	1 : 139	1 : 246
E	1 : 214	1 : 340
entre E et F	1 : 400	1 : 615
F	1 : 409	1 : 740
G	1 : 270	1 : 429
entre G et H		1 : 320.

Comme on le voit, le second a obtenu des valeurs beaucoup plus petites que le premier; mais, dans leurs rapports, elles s'accordent pourtant assez bien. Tous deux trouvent la plus petite en D et en F. Pour obtenir les différences, il se servaient des planches ophthalmométriques, amenées de leur propre main sous l'angle pour lequel ils croyaient constater une différence de couleur. Mon spectroscope se prêtait admirablement à ce genre de déterminations. La couleur fixe de comparaison (soit Na, soit le jaune simple) était amenée avec la fente simple et avec l'une

1) *Archiv f. Ophth.*, XVIII, 2, p. 399.

2) Voir *Ibid.*, XVIII, 1, p. 72, où l'on trouve aussi les chiffres corrigés de M. Mandelstamm. La détermination de B, de l'exactitude de laquelle M. Drobowolsky lui-même doute, a été omise.

des fentes couplées, et celle-ci, à l'aide d'une vis micrométrique, pouvait être déplacée (changement de couleur) et, à l'aide d'une autre vis, rétrécie ou élargie (changement d'intensité). Nous suivions, du reste, la méthode des cas exacts et inexacts, déterminant le minimum, pour lequel une différence était reconnue, et le maximum, pour lequel elle ne l'était pas, et prenant la moyenne [1]). Les différences sur lesquelles on avait à se prononcer étaient produites par une main étrangère, qui en même temps changeait les intensités: l'observateur avait alors à égaliser d'abord lui-même les intensités, et à juger ensuite la différence de couleur produite, — l'influence de l'intensité sur le jugement ne se laissant pas éliminer lorsque l'observateur lui-même produit aussi la différence de couleur, ce qui d'ailleurs a l'inconvénient de faire entrer en jeu le contraste (voir p. 325). Par cette méthode, j'ai obtenu, à des jours différents, pour la plus petite différence perceptible, λ 0,0004 à λ 0,0006 [2]). Dans des expériences comparatives avec M. Straub, nous la déterminâmes tous les deux pour λ 0,589 et pour λ 0,581, c'est-à-dire, pour son jaune simple et pour le mien, et ces expériences révélèrent que M. Straub était plus sensible aux différences de ce dernier, moi, à celles du premier. Il y a donc lieu d'admettre qu'on est le plus sensible aux changements du jaune. M. Mandelstamm et M. Dobrowolsky ont également, comme nous l'avons vu, trouvé la plus petite différence perceptible en D, c'est-à-dire, tout au moins au voisinage du jaune simple; puis un second minimum en F, dans le bleu simple ou tout près. Il n'y a rien de surprenant à ce que la plus grande sensibilité aux différences se rencontre précisément dans les points critiques, où les couleurs simples passent des deux côtés à des couleurs opposées entre elles. M. König et M. Dieterici viennent aussi de trouver dans le bleu un minimum de l'erreur m_2,

---

[1]) Voir: G. E. Müller, *Zur Grundlegung der Psychophysik*, 1881, p. 63.

[2]) Pour apprécier convenablement les rapides changements de couleur dans le jaune et ailleurs, il faut, si la source lumineuse est forte, que la fente soit étroite: avec une fente plus large, les différences perceptibles se distribuent aussi sur les couleurs voisines.

tandis que le second minimum a été trouvé par M. König près de D, par M. Dieterici à une certaine distance de D, savoir, à environ λ 0,570. Est-ce que, pour M. Dieterici, le jaune simple ne serait pas déplacé dans cette direction? — Au reste, m_2 ne donne pas la mesure exacte de la plus petite différence perceptible.

De même que l'appréciation du jaune est imparfaite chez les sujets appartenant à la seconde catégorie, de même leur sensibilité aux petites différences a diminué, le sens chromatique fût-il d'ailleurs à peine affaibli. En voici des exemples:

1. B. étudiant en médecine. Cherchant des personnes de la seconde catégorie, je leur donnais à déchiffrer les tableaux anisochromatiques de Stilling, et il me sembla que, sous ce rapport, B. le cédait un peu aux sujets à vue normale. D'accord avec cette impression, l'équation du Na exigea Tl 53,3: Li 46,7. Pourtant, il fut reconnu plus tard que B. pouvait déchiffrer tous les tableaux de Stilling (seconde édition), que pareillement dans les expériences de Holmgren il témoignait à peine de qüelque affaiblissement du sens chromatique, et qu'avec les doubles prismes liquides, qui donnent des mélanges de jaune et de vert, il ne le cédait que peu ou point à moi-même. Aussi il s'estime en possession d'un sens chromatique excellent. Néanmoins avec les couleurs spectrales, par la méthode qui vient d'être décrite, la plus petite différence perceptible était chez lui beaucoup plus grande que chez les sujets normaux. Tandis que son jaune fut trouvé en λ 0,5902, la plus petite différence perceptible s'élevait pour lui à λ 0,0013, pour moi, déterminée à la même occasion, seulement à 0,00051.

2. Un cas analogue a été fourni par l'étudiant en médecine V. D. Avec quelque effort, il déchiffre tous les tableaux de Stilling, mais il sait que, surtout à la lumière du soir, il ne distingue pas aussi facilement que d'autres le vert et le jaune. L'équation Tl 51,6 ⊃ Li 48,4 = Na 29,5 le classe dans la seconde catégorie. Pour jaune simple, il indique λ 0,5906; 0,5926 lui est trop rouge, 0,589 trop vert. L'erreur moyenne m_1 commise en cherchant à égaliser parfaitement les deux couleurs, était de λ 0,0003. La plus petite différence perceptible de son jaune, d'après la méthode des cas exacts et inexacts, s'élevait à 12,5 divisions de l'échelle, tandis que pour moi, qui la déterminais alternativement avec lui pour mon propre jaune, elle n'était que de 4,8.

3. La plus petite différence perceptible était beaucoup plus grande chez S., étudiant en médecine, qui avait trouvé pour équation Tl 48,7 ⊃ Li 51,3 = Na 26,8, mais qui ne déchiffrait les tableaux de Stilling que difficilement et partiellement, et dont la faiblesse du sens chromatique s'était révélée tant dans les expériences de Holmgren que dans celles avec les prismes liquides.

Dans le cercle chromatique il indique la couleur juste, mais parmi les couleurs spectrales son choix est incertain et oscille entre λ 0,5736 et λ 0,543, moyenne λ 0,555.

Comparée à λ 0,5892 Na, il trouve λ 0,596 exactement pareille, mais λ 0,6, à intensité égale, décidément rougeâtre et λ 0,589, par contraste, tirant sur le vert; λ 0,584 lui paraît tout à fait semblable à Na, λ 0,573 légèrement verdâtre, 0,55 plus verte et plus pâle et à côté, par contraste, λ 589 maintenant rougeâtre.

Sur les différences perceptibles l'intensité lumineuse a une grande influence. Avec une fente large de 0mm,15, λ 0,589 est jaune, λ 0,58 déjà verdâtre, λ 0,578 décidément verte et à côté, par contraste, λ 0,589 de nouveau rougeâtre; avec une fente large de 0mm,62, λ 0,578 est encore entièrement semblable à λ 0,589, et λ 0,552 seulement devient indubitablement verte et pâle.

L'influence de l'intensité, manifestement très grande dans ce dernier cas, ne manque pas non plus dans celui du sens chromatique normal, où, quand l'intensité est grande, le jaune s'étend aux dépens du vert (Chodin). Du côté du rouge, que le sens chromatique soit faible ou normal, l'influence de l'intensité est beaucoup moindre.

Il ne faut d'ailleurs pas perdre de vue que les différences d'intensité, sans différence de longueur d'onde, sont plus aisément interprétées comme différences de couleur lorsque le sens chromatique est très faible, que lorsqu'il est normal: pour obtenir des résultats nets, dans la comparaison de longueurs d'onde différentes, on ne devra donc faire juger de la couleur qu'après avoir rendu les intensités égales. Et même alors, une différence de saturation pourrait encore être en jeu. Dans les cas tels que celui de S., il y a donc bien lieu de soupçonner qu'il existe quelque chose de plus qu'une simple faiblesse du sens polychromatique, qu'on est en présence d'un système purement dichromatique. Chez S., toutefois, on eut la preuve du contraire, en reconnaissant que d'un mélange de rouge spectral et de bleu on ne pouvait obtenir du blanc ou du gris neutre, mais seulement du pourpre et du rose, et que dans le spectre la ligne neutre faisait défaut.

L'aveugle pour le rouge, à système dichromatique pur, désigne

encore, lui aussi, son jaune dans le spectre, — parfois même avec un écart moyen faible:

C'est ainsi que

4. S., étudiant en médecine, complètement aveugle pour le rouge, arrivait:

en cas d'intensité modérée (fente de 0mm,2), à la moyenne λ 0,5763, avec m_1 = 0,005;

en cas d'intensité plus grande (fente de 0mm,8), à la moyenne λ 0,5794, avec m_1 = 0,005.

Partant de λ 0,589 comme couleur de comparaison, il trouvait:

λ 0,596 (à intensité égale) exactement pareille,
" 0,6 de couleur un peu plus vigoureuse,
" 0,62 plus éclatante,
" 0,63 à λ 0,65 de plus en plus rouge.

Lorsque les comparaisons avaient lieu pour des intensités beaucoup plus grandes ou plus petites, les différences étaient moins bien saisies.

Partant de nouveau de λ 0,589, et y comparant des longueurs d'onde plus petites, il déclarait:

λ 0,584 exactement pareille.
" 0,573 un peu plus pâle: 0,589 a plus d'éclat.
" 0,56 plus pâle.
" 0,589 est immédiatement reconnue pareille.
" 0,56 est plus pâle.
" 0,54 à 0,52 de plus en plus pâle.

Pour de grandes intensités, les différences de saturation deviennent moins sensibles.

L'aveugle pour le vert ne distingue même plus guère d'après la saturation. Exemple:

5. V. d. V. (étudiant en médecine), aveugle pour le vert, à système purement dichromatique.

Partant de λ 0,589, des comparaisons sont faites avec des longueurs d'onde plus grandes, jusqu'à λ 0,63, 0,66, 0,69: à intensité égale, λ 0,589 (jaune typique) et 0,69 (rouge typique) sont exactement pareilles, — λ 0,69, en cas d'intensité faible, peut-être un peu "plus intense de couleur" (plus saturée).

La comparaison étant faite avec des longueurs d'onde plus petites, λ 0,584 est encore exactement pareille à λ 0,59, mais, à partir de λ 0,578, la couleur devient un peu plus pâle, et en λ 0,52 il parle de blanc sale, à côté duquel λ 0,589 lui paraît, par contraste, rouge. Sa ligne neutre se trouve vers λ 0,497.

Malgré cela, au spectroscope, il savait assez bien désigner le jaune. Dans 10 déterminations, il choisit en moyenne λ 0,594, comme maximum 0,607, comme minimum 0,587, avec la valeur m_1 = λ 0,0053 pour écart moyen

à la moyenne générale. Dans ces déterminations il était guidé par l'intensité. Lorsque l'indication de celle-ci faisait défaut, comme dans l'établissement de l'équation Li ⊃ Tl = Na, il trouvait après avoir réglé Na d'après l'intensité, tout mélange également bon.

Les cas ci-dessus forment une série, dans laquelle le discernement des couleurs, appartenant à la zone chaude du spectre, se perd de plus en plus.

f. Le rapport des intensités des mélanges à la somme de leurs composantes.

(Avec le concours du Dr Sulzer).

Dans les comparaisons des mélanges de Li ⊃ Tl avec Na (ou avec le jaune), nous ne déterminions pas seulement la proportion de Li : Tl (x : y), mais en outre l'intensité du Na (ou du jaune) obtenu. La question se présentait maintenant de savoir quel est le rapport des intensités de ce mélange J Li ⊃ Tl à celles des composantes J Li et J Tl, et plus spécialement à la somme des composantes J Li + J Tl. Il s'agissait de déterminer le coefficient

J Li ⊃ Tl : J Li + J Tl.

Les équations mêmes nous donnent déjà immédiatement les intensités du mélange, sous la forme J Li ⊃ Tl = Q Na. Pour trouver le coefficient, il ne reste donc qu'à calculer aussi J Li et J Tl en J Na. A cet effet, nous avons fait usage des relations

10 Na = x′ Tl et
10 Na = y′ Li,

déjà déterminées antérieurement pour les personnes ici mentionnées.

Dans le tableau suivant on trouve les résultats obtenus de cette manière, pour des cas de sens chromatique normal.

a, *b*, *c* sont les quantités, tirées de mon grand tableau [1]);

1) *Onderzoekingen, gedaan in het physiol. labor. der Utrechtsche Hoogeschool*, t.. VIII, bl. 178.

d, *e*, *f* les intensités correspondantes; *f* trouvée, *d* et *e* calculées en Na;

g la somme de *d* et *e*.

La dernière colonne donne le coefficient cherché.

Nos. d'ordre.	NOMS.	a QLi ⊃	b QTl =	c QNa'	d J Li	e J Tl	f J Li ⊃ Tl	g JLi + JTl	[illegible]
1.	Ka............	69	31	27.7	20.8	17.5	27.7	38.3	[illegible]
2.	Wa..............	68.9	31.1	24.8	19.5	24.5	24.8	44	[illegible]
3.	Ou..............	69	31	23.5	14.1	19.2	23.5	33.3	[illegible]
4.	Su O.D........	69.5	30.5	23.0	20.7	23.6	23.	44.3	[illegible]
5.	Do 1)............	70.2	29.8	24.6	12.5 (?)	14.3	24.6	26.8	[illegible]
″.	Déterm. postérieure	69.6	30.4	24.9	17.8	14.5	24.9	32.3	[illegible]
6.	Cr..............	71.	29.	22.	20	17.8	22	37.8	[illegible]
7.	v. L............	71.1	28.9	26.2	17.7	20.8	26.2	38.5	[illegible]
8.	v. B............	71.2	28.8	23.2	14.8	13.5	23.2	28.3	[illegible]
9.	Hu..............	71.7	28.3	19.6	17.7	11.8	19.6	29.5	[illegible]
10.	Ei..............	73	27.	21.4	15.2	18.8	21.4	34	[illegible]
11.	En..............	74.3	25.7	21.6	17.4	13.	21.6	30.4	[illegible]
″.	Determ. postérieure	75.4	24.6	22.3	16.7	18.2	22.3	34.9	[illegible]
12,	Tr............	77.1	22.9	19.7	14.6	12.2	19.7	26.8	[illegible]
13.	Be..............	77.1	22.9	19.3	15.5	10.5	19.3	26	[illegible]
14.	Su..........O.S.	80.2	19.8	20.	17.3	13.9	20.	31.2	[illegible]
	Moyenne..........	72.4	27.	22.6					[illegible]
	Moyenne { Nos. 1—7	69.8	30.2	24.6					[illegible]
	Moyenne { Nos. 8—14	74.9	25.1	20.7					[illegible]

Ce tableau nous apprend que l'intensité du mélange (colonne c ou f) est toujours plus petite que la somme des intensités des composantes (g): le coefficient varie de 0,52 à 0,82 et est en moyenne 0,678.

Les cas sont rangés d'après la quantité de Li (a) dans l'équation de Na: or, évidemment, à mesure que Li croît, l'intensité

1) Pour le calcul des moyennes il n'a pas été tenu compte de la première détermination de Do, dans laquelle d a manifestement une valeur inexacte, ni de la seconde détermination de En.

du mélange (c) diminue. Cette influence se fait sentir aussi, bien que moins distinctement, dans le coefficient (h): pour les Nos. 1—7 il est en moyenne 0,649, pour les Nos. 8—14 en moyenne 0.706.

Au mode de calcul suivi pour obtenir J Li et J Tl (d et e), d'après les résultats trouvés antérieurement, chez les personnes mentionnées, pour 10 D = x' Tl et 10 D = y' Li, on pourrait objecter que l'intensité absolue à laquelle la comparaison s'opère n'est pas sans influence sur le rapport des intensités de Na à Li et à Tl. Nous résolûmes, en conséquence, de déterminer aussi directement les quantités Na sur les quantités Li et Tl trouvées en chaque cas. Cela eut lieu dans 9 cas. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-après, sous les mêmes numéros — en tant que les mêmes personnes y figurent — que dans le tableau précédent:

a, *b*, *c* sont de nouveau les chiffres de l'équation de Na, qui pour ce tableau ont été redéterminés spécialement (d'où une légère différence avec les précédents), en même temps que *d*, *e*, *f*, les intensités; — pour 6 et 10 toutes les déterminations ont eu lieu simultanément pour les deux tableaux.

No.	NOMS.	a. QLi ○	b. QTl =	c. QNa'	d. JLi	e. JTl	f. JLi○Tl	g. J iL + J Tl	h. Coeff.	k. Coefficient calculé du tableau précédent.
1.	Ka.	70.7	29.3	28.4	22.8	19.5	28.4	42.3	0.671	0.72
2.	Wa.	69	31	25.6	30.5	21.2	25.6	51.7	0.50	0.564
4.	Su. OD.	70.5	29.5	25.8	22.7	28.7	25.6	51.4	0.502	0.52
5.	Do.	69.7	30.3	23.9	14.8	17.8	23.9	32.6	0.73	0.77
6.	Er.	71	29	22	18.9	19.2	22.	38.1	0.577	0.582
7.	v. L	71.1	28.9	27.	21.	22	27	43.	0.603	0.68
10.	Ei.	73.	27	21.4	19.6	24.	21.4	43.6	0.49	0.63
11.	En.	75.4	24.6	20.4	16.72	18.2	22.3	34.9	0.64	0.71
14.	Su. Os. .	80	20.	21.3	20.9	19.3	21.3	40.2	0.53	0.64
	Moyenne. .	72.5	27.5	24.0					0.583	0.646

On voit que dans ce tableau le coefficient est, sans exception, encore plus petit que dans le précédent:

le maximum, ici 0,73 , est là 0,77
„ minimum, „ 0.49 , „ „ 0,52
la moyenne, „ 0,583, „ „ 0,687.

Dans les deux tableaux le plus grand coefficient appartient à Do, et les coefficients plus petits tombent aussi, en général, sur les mêmes personnes. En présence de cette constance des résultats, il ne peut être douteux que l'intensité du mélange de Li et de Tl ne le cède de beaucoup à la somme des intensités de Li et de Tl, pris séparément.

Ayant fait précédemment, de même qu'avec Na, les équations de Li ⊃ Tl avec les autres couleurs spectrales S, situées entre Li et Tl (voir *b*, p. 311), nous avons pu déterminer le coefficient J Li ⊃ Tl : Li + J Tl pour chaque couleur, de même que pour Na. Un exemple des résultats est donné par le tableau suivant, qui concerne mon œil droit:

a Couleur S. λ	b QLi	⊃ m_1	QTl	c = Q_s	d J Li	J Tl	e J Li Tl	f : J Li+	g J Tl Coeff.
0.6705 (Li)	100		0	100	100	0	100	100	1
0.660	99.5		0.5	70.2		1.1	70.2		
0.654	99		1.0	62.7	57.4	1.9	62.7	59.3	
0.642	98.2		1.8	38.1	37.1	3.6	38.1	40.7	0.936
0.633	96.6	0.3	3.4	27.7	27.8	6.5	27.7	34.3	0.808
0.610	87.6	1.15	12.4	20.7	16.7	10.3	20.7	27	0.767
0.590	70.7	1.7	29.9	23.9	14.4	19	23.9	33.4	0.716
0.5685	43.5	1.5	56.5	36	10.9	32	36	42.9	0.839
0.5495	20.7	0.1	79.3	59	8.2	60.4	59	68.6	0.86
0.542	3.8	1.4	96.2	78	1.7	77.8	78	79.5	0.981
0.535 (Tl)	0		100	100				100	1.000

La colonne *a* indique les longueurs d'onde des couleurs de comparaison, en commençant par Li λ 0,6705 et finissant par Tl λ 0,535;

la colonne *b*, les quantités des composantes Li et Tl, ainsi que m_1;

c la quantité de la couleur composée,

d les intensités de la colonne *b*, exprimées en intensités de *S*,

e l'intensité du mélange,

f la somme des intensités consignées en *d*, et enfin

g le coefficient cherché.

Pour λ 0,660 et 0,654, qui n'amènent presque pas de Tl dans l'équation, le coefficient ne mérite pas encore confiance et a donc été omis. Au-delà, nous le voyons décroître jusqu'en λ 0,590, à peu près le jaune de Na, pour remonter ensuite jusqu'à λ 0,535, où il redevient pour Tl simple, de même qu'il l'était plus haut pour Li simple, égal à 1. Le coefficient a donc sa plus petite valeur là où le rouge de Li et le vert de Tl se neutralisent exactement, ne laissant que le jaune.

Les quantités (les largeurs de fente) peuvent être réduites, en rapport avec l'abscisse, au spectre d'interférence; mais, le coefficient *g* restant le même dans cette réduction, je l'ai jugée superflue.

Des déterminations analogues, faites chez d'autres personnes, ont fourni les résultats suivants:

λ	I Donders.		II Straub.	III Kagenaar.		IV Waelchli.	V Sulzer.		V Sulzer.
	O. D.	O. D.		O. D.	O. D.		O. D.	O. S.	O. D.
0.6705 (Li)	1.000	1	1	1	1	1	1	1	1
0.633	0.808	0.858	0.93	0.77	0.88	0.88	0.96	0.93	0.8
0.610	0.767	0.783	0.75	0.57	0.63	0.78	0.75	?	0.77
0.5895	0.716	0.712	0.63	0.64	0.66	0.44	0.45	0.54	0.50
0.5685	0.839	0.798	0.73	0.69	0.73	0.723	0.63	0.69	0.67
0.5495	0.86	0.833	0.81	0.89	0.88	0.833	0.78	0.90	0.79
0.542	0.981	0.951	0.95	0.96	0.96	0.996	0.92	0.87	0.90
0.535 (Tl)	1.000	1	1	1	1	1	1	1	1

Dans toutes les équations nous trouvons le coefficient < 1, donc l'intensité du mélange plus petite que la somme des intensités des composantes. A une seule exception près (III), le plus petit coefficient correspond à λ 0,589, c'est-à-dire, comme chez moi, au jaune de sodium: en ce point, chez M. Waelchli et pour l'un des yeux de M. Sulzer, il devient même inférieur à 0,5; le maximum, 0,716, se trouve chez moi. Chez I, III et V les déterminations ont été faites deux fois, à des temps différents. Pour les deux yeux de M. Sulzer, elles eurent lieu le même jour, et plus tard on en fit encore d'autres, pour le seul œil droit: l'accord des deux déterminations sur l'œil droit est très satisfaisant. L'exactitude, est en général, plus grande qu'on n'eût pu le supposer en considérant que, des trois équations qui doivent fournir le coefficient, il n'y en a qu'une (q Li ⊃ q' Tl = Q*s*) qui soit isochromatique, tandis que les deux autres (q Li = Q'*s* et q' Tl = Q'*s*) sont hétérochromatiques. — Dans l'établissement d'une équation hétérochromatique il y a *une apparence* d'arbitraire. Il semble qu'on eût pu choisir tout aussi bien un rapport différent. Mais, si l'on modifie quelque peu l'intensité d'une des deux couleurs, on la déclare, sans hésiter, *positivement* trop foncée, ou *positivement* trop claire. Si l'on essaie de se rendre compte de ses sensations, on trouve l'une des couleurs de sa nature plus claire, l'autre plus sombre, par exemple, Na plus claire que Tl, et toutes les deux plus claires que Li. Dans la comparaison, la couleur claire a l'air d'être tempérée par un crêpe, — c'est ainsi qu'un jaune quasi voilé d'un crêpe devient semblable à un rouge clair, — et d'abord on est porté à évaluer trop bas l'impression lumineuse du premier. Pour bien juger, l'œil ne doit pas s'arrêter longtemps sur l'une des deux couleurs, il doit plutôt passer à intervalles égaux de l'une à l'autre, et parcourir aussi à différentes reprises, dans les deux sens, la zone limite entre les deux couleurs, zone où, par contraste, la différence d'intensité s'accuse le plus fortement. Que l'on se garde surtout des comparaisons par vision excentrique: on obtient alors des résultats tout différents, dont nous n'avons que faire en ce moment.

Pour lever tous les doutes, j'ai d'ailleurs, dans la plupart des cas, fait exécuter, outre les comparaisons ordinaires, d'autres comparaisons J li = J*s* et J tl = J*s*, où l'intensité de *s* était positivement déclarée trop forte; or, même alors, le coefficient, au voisinage de D, restait toujours au-dessous de 1. Il ne devenait > 1 qu'à proximité de Tl et de Li, là où il approche déjà de l'unité dans les comparaisons ordinaires.

Disons encore qu'on faisait toujours deux séries entières d'observations, l'une ascendante, l'autre descendante, en augmentant leur nombre lorsqu'une grande exactitude était désirée; le coefficient était calculé pour chacune d'elles séparément et on prenait la moyenne des valeurs ainsi obtenues. Pour donner une idée nette des observations et des calculs, je communique ici, dans son ensemble, l'une des déterminations: (voir le tableau p. 342.)

Puisque le coefficient d'intensité du mélange dépasse à peine 0,5 chez Sulzer (œil droit) et chez beaucoup d'autres, l'intensité de l'une des composantes doit parfois être plus grande que celle du mélange. C'est effectivement ce que montrent les chiffres:

			J mélange	JTl	JLi
Pour Sulzer	O. D.	en λ 0,5892	24	27.1	28.5
	O. S.	»	22.1	22.9	23.9
plus tard	O. S.	»	21.3	19.3	20.9
Waelchli		»	24.6	22.8	26.6
antérieurement		»	25.6	21.2	30.5

Pour d'autres cela n'est pas le cas. Ainsi il a été trouvé par:

Donders en λ 0.5892	24.88	17.1
Kagenaar » » »	30.25	21.4

Ce résultat peut aussi être contrôlé d'une manière plus directe. Après avoir réalisé l'équation de Na, on ferme la fente de Li et on amène la fente simple sur Tl, en rendant son intensité égale à celle de la fente de Tl. Les deux fentes Tl égales, on ouvre la fente du Li. La première impression de Sulzer, œil

λ	Quantités de Tl	Li	Moy. Tl	m_1	Intensités de Tl ⊃ Li	Tl	< Tl	Li	< Li	Tl + Li	<Tl + < Li	Coefficients de $\frac{Tl ⊃ Li}{Tl + Li}$	Moy.	m_1	$\frac{Tl ⊃ Li}{<Tl + <Li}$	Moy.	m_1
0.660	1.0	99.0			73.5	6.4		83.2		89.6		0.823	0.8315	0.0085			
	1.0	99.0			67.3	7.2	6.5	73.8	62.4	81.0	68.9	0.840			0.976		
	2.9	97.1			37.1	5.5		23.0		38.5		0.963					
	2.9	97.1			29.3	9.0	6.9	28.5	28.1	37.5	35.0	0.781			0.838		
0.633	3.0	97	2.88	0.072	26.2	10.0	6.0	26.0	22 6	36.0	28.6	0.728	0.797	0.0826	0.917	0.864	0.027
	2.9	97.1			28.7	9.8	6.9	32.0	26.9	41.8	33.8	0.687			0.850		
	2.7	97.3			23.2	8.7	5.5	23.3	21.8	32.0	27.3	0.725			0.849		
0.610	12.7	87.3	12.3	0.4	29.8	15.9		24.1		40.0		0.745	0.769	0.0245			
	11.9	88.1			29.6	13.3	11.0	24.0	22.4	37.3	33.4	0.794			0.886		
	29.5	70.5			24.0	27.1		28.5		55.6		0.432					
0.5892	29.8	70.2	29.5	0.2	26.3	30.1	19.4	19.5	16.1	49.5	35.5	0.528	0.503	0.047	0.741	0.733	0.0085
	29.2	70.8			27.0	29.0	20.5	20.1	16.8	49.1	87.3	0.549			0.724		
0.5884	34.0	66.0	32.1	1.9	23.7	31.6		19.9		51.5		0.460	0.504	0.044			
	30.2	69.8			26.9	28.1	21.9	20.9	18.1	49.0	40.6	0.549			0.662		
	57.2	42.8			37.9	41.4		19.0		60.4		0.626					
0.5685	57.1	42.9	57.43	0.38	36.2	36.0	27.4	14.9	8.9	50.9	36.3	0.711	0.673	0.032	0.998	0.888	0.110
	58.0	42.0			35.8	31.4	28.5	21.0	17.6	52.4	45.1	0.638			0.777		
0.5495	84.2	15.8	49.8	4.4	58.9	62.3	48.7	13.6		75.9		0.776	0.791	0.015			
	75.5	24.5			56.0	57.6		11.9	8	69.5	56.7	0.806			0.988		
0.541	91.1	8.9	91.2	0.1	79.3	82.1		3.7		85.8		0.924	0.896	0.028			
	91.3	8.7			88.0	91.5	68.5	9.6	4.8	101.5	73.3	0.867			1.2005		

droit, fut que le mélange était plus rouge et plus clair que le Tl; mais, au bout de quelques secondes, le rouge disparut et la clarté tomba jusqu'à celle du Tl, et même au-dessous. C'est aussi ce que trouvèrent Dobberke et surtout Waelchli. Pour moi également, la couleur devint rougeâtre au moment de l'ouverture de la fente du Li, pour faire bientôt place à du jaune de Na, qui toutefois était et resta très décidément plus intense que le Tl, — en accord avec la valeur plus grande de mon coefficient d'intensité du mélange. Ce même résultat s'appliquait aussi à Kagenaar. Mais, chez celui-ci, il arrive que l'intensité de la composante Li surpasse celle du mélange, savoir, en λ 0,61, où la première est Li 26, la seconde S 25, et en λ 0,633, où les intensités sont respectivement Li 35,5 et S 31,5: chez Kagenaar, ainsi que nous l'avons vu plus haut, le rapport J Li : J Na est exceptionnellement grand. Les chiffres montrent que, chez Sulzer et Waelchli, la fente du Li doit aussi perdre quelquefois de son intensité par l'adjonction du Tl. La rapidité avec laquelle disparaît la prédominance de la couleur ajoutée en même temps que l'intensité du mélange diminue, est très frappante: le phénomène mérite une étude spéciale. — Les expériences n'ont pas seulement porté sur le rapport Li : Tl de l'équation de Na, mais aussi sur toutes les autres équations mentionnées dans les tableaux. Lorsque les quantités de Li, ajoutées au Tl, étaient plus petites, je pouvais encore, au moment même du mélange, en observer distinctement l'influence sur la couleur et sur l'intensité, mais, dès que cessait l'influence sur la couleur, celle exercée sur l'intensité devenait également douteuse. Chez d'autres aussi, les résultats répondirent, en général, à ce que les tableaux faisaient prévoir.

Ce qui vient d'être dit au sujet de l'intensité relative des mélanges de couleurs, concerne uniquement le sens chromatique normal. Dans le tableau suivant on trouve les résultats obtenus par Blonk et Snel, dont le premier a le sens chromatique diminué, le second, un sens chromatique très faible. De chacun d'eux

nous possédons deux séries d'observations, aussi détaillées que celles de Sulzer (tableau p. 342); mais il suffira de donner les résultats des équations exactes, ainsi que les moyennes

λ	Blonk.			Snel.		
	Série 1.	Série 2.	moy.	Série 1.	Série 2.	moy.
0.633	0.68	0.62	0.65	0.79	0.88	0.835
0.610	0.65	0.54	0.595	0.61	0.72	0.665
0.5895	0.49	0.61	0.55	0.93	0.85	0.89
0.5685	0.88	0.70	0.79	1.03	0.93	0.98
0.5495	1.00	0.90	0.95	0.92	0.86	0.89
0.542	0.98	1.01	0.995	0.89	0.97	0.93

On voit que, chez Blonk, les équations concordent assez bien avec celles du sens chromatique normal, les coefficients étant seulement, en général, un peu plus grands; mais chez Snel ces coefficients sont très irréguliers et se rapprochent beaucoup plus de l'unité. Ils forment ainsi la transition aux coefficients des aveugles pour le rouge et des aveugles pour le vert, lesquels diffèrent si peu de l'unité, que nous n'avons pas le droit d'admettre que les intensités des mélanges ne sont pas égales aux sommes des intensités des composantes. C'est ce qui ressort du tableau suivant, qui donne les coefficients d'une personne à sens chromatique normal et de cinq personnes à sens dichromatique: comme ces derniers ne distinguent pas les couleurs, on ne pouvait partir de S, mais il fallait prendre, pour base des équations, des quantités déterminées de Tl et de Li. (Voir le tableau p. 345.)

Sur ce tableau, M. van Genderen Stort, à sens chromatique normal, est le seul chez qui le coefficient de 30 $\supset$ 70 Li soit beaucoup au-dessous de l'unité, savoir égal à 0.638, s'accordant en cela avec le mien et avec celui d'autres personnes à sens chromatique normal.

Chez les trois suivants, tous aveugles pour le rouge, la grandeur du coefficient n'a de signification que pour Li 90 et Li 95, parce que c'est seulement à partir de là que l'intensité du Li est un peu notable vis-à-vis de celle du Tl: or, pour ces proportions, les

		Tl ⊃ Li = *S*			Tl = *S*		Li = *S*		Coeff.
Genderen Stort.	normal.	90	10	34.1	90	33.9	10	2.4	0.944
		30	70	26.1	30	21.7	70	19.1	0.638
lfrinkhof........	aveugle pour le rouge.	90	10	67.0	90	67.4	10	0.8	0.982
		30	70	29.2	30	27.2	70	2.6	0.976
		10	90	14.5	10	11.8	90	3.5	0.947
		5	95	12.1	5	6.8	95	4 9	1.036
l. Weijde.........	"	5	95	11.06	5	7.62	95	3.94	0.957
nckebach........	"	5	95	6.88	5	3.8	95	3.4	0.955
		5	95	7.98	5	4.26	95	3.3	1.06
d. Zijp.............	aveugle pour le vert.	90	10	40.4	90	30.7	10	2.3	1.224
		30	70	23.3	30	12.8	70	8.1	1.115
inkert............	"	30	70	22.8	30	12.1	70	11.2	0.978

coefficients ne varient que de 0,947 à 1,036 (1,06?) et, par conséquent, oscillent autour de l'unité.

Chez les deux derniers, aveugles pour le vert, on n'a à considérer que les coefficients pour 70 Li ⊃ 30 Tl, combinaison à laquelle, chez les personnes à sens chromatique normal, correspond un coefficient d'environ 0,6, et ici, comme moyenne, un coefficient > 1 et pouvant donc, tout au moins, être regardé comme égal à 1.

Ce résultat, fourni par les aveugles pour les couleurs, se rattache probablement à l'égalité du caractère des deux couleurs Tl et Li, qui, chez eux, appartiennent toutes deux à la couleur chaude.

Après tout ce qui précède, on ne peut plus douter que, lorsque du rouge et du vert se neutralisent, l'intensité est notablement moindre que la somme des intensités de ces deux éléments.

Ce résultat m'a surpris.

Des expériences antérieures, faites avec M. Waelchli, nous avaient appris que le blanc, formé de jaune et d'indigo ou de

violet, surpassait de beaucoup la composante jaune et pouvait être estimé avoir une intensité égale à la somme des intensités du jaune et du violet. Avant nous, M. Weinhold [1]), dans des expériences analogues, avait obtenu le même résultat, et M. Bruecke [2]) croyait également avoir reconnu que des couples de couleurs non spectrales (il le dit expressément pour le rouge et le bleu) forment un mélange dont l'intensité est égale à la somme des intensités des composantes.

Avant de discuter la signification du fait aujourd'hui bien constaté pour les mélanges de Tl et de Li, j'attendrai que j'aie exécuté, avec l'exactitude nécessaire, des comparaisons analogues pour les combinaisons des différentes couleurs spectrales, tant des couleurs simples adjacentes, que de celles qui sont plus éloignées l'une de l'autre, et qu'en outre l'influence des intensités ait été étudiée avec soin.

Provisoirement, j'ai déjà fait connaître [3]) que, tout comme cela a lieu pour les mélanges de rouge de Li et de vert de Tl, les intensités des mélanges de jaune de Na (D de Fraunhofer) et de vert-bleu (λ 0,503) sont moindres que la somme des intensités des composantes (Waelchli, Straub, Donders), tandis que, plus tard, nous avons trouvé que pour les mélanges de Na et de Li, le coefficient ne diffère que peu ou point de l'unité. Cela ne s'appliquait pas, toutefois, aux mélanges de rouge et de bleu ou d'indigo (Donders, Straub), mélanges dont la saturation reste toujours beaucoup au-dessous de celle du violet.

---

1) Poggendorff's *Annalen*, t. II, n. série., 1877, p. 631.

2) *Sitzber. K. Akad. der W.*, 1882, t. LXXXIV, part. 3, p. 440.

3) *Kon. Akad. v. Wetenschappen*, séance du 29 déc. 1883.

SUR LE CALCUL
DES OBSERVATIONS HORAIRES DE LA FORCE HORIZONTALE DU MAGNÉTISME TERRESTRE,

PAR

J. P. VAN DER STOK,
directeur de l'observatoire de Batavia.

Le principal obstacle auquel on se heurte dans le calcul des données du magnétisme terrestre c'est que, outre les mouvements ordinaires, tels par exemple que les variations diurnes, il y en a manifestement encore d'autres, les soi-disant perturbations, qui viennent déranger le cours régulier de la grandeur observée: or, de ces derniers mouvements, en l'absence de toute théorie, et vu notre ignorance presque complète de la nature des phénomènes observés, il n'existait même pas, jusqu'ici, une définition claire.

Reconnaître les plus grandes de ces perturbations n'est pas difficile: elles sont, lorsqu'une violente éruption se produit dans l'atmosphère solaire, si fortement accusées, que sans définition rigoureuse, à la seule inspection superficielle, on peut constater la perturbatlon, mettre à part la période troublée pour en faire l'étude ultérieure, et exclure du calcul général les données qu'elle a fournies.

Là, toutefois, où se rencontrent de grandes perturbations, il est évident, même sans examen régulier des courbes photographiques, qu'il doit exister aussi des déviations plus petites, *de même nature*, et d'autant plus nombreuses qu'elles sont plus petites: or, la séparation de ces déviations ne peut se faire qu'à l'aide

d'une méthode *numérique* fondée sur une définition logique et précise. Plus cette méthode sera exacte, plus vite on pourra arriver à la connaissance des lois de ces perturbations, et comme la voie suivie jusqu'à présent n'a pas donné de résultats proportionnés au travail et à l'argent consacrés à l'étude du magnétisme terrestre, — de sorte que beaucoup d'observatoires s'abstiennent même de la réduction et de la publication régulières des données recueillies, — la condition de facilité et de rapidité d'emploi devra céder le pas, dans le choix de la méthode, à l'impérieuse exigence de l'exactitude.

Dans un Mémoire [1]) présenté, au mois de mai dernier, à la Conférence polaire tenue à Vienne, mémoire qui a été imprimé, comme annexe, à la suite du Protocole de la Conférence, j'ai essayé de lever cette incertitude qui entravait le progrès de la science du magnétisme terrestre, en proposant une nouvelle définition et une méthode de calcul ayant cette définition pour base. J'avais, dans ce travail, donné le calcul complet des observations de la force horizontale pendant le mois d'octobre 1882 à Batavia; mais le temps m'avait manqué pour contrôler la méthode proposée de la seule manière réellement décisive, savoir, en composant synthétiquement quelques observations au moyen d'éléments arbitraires, pour retrouver ensuite par voie d'analyse, en partant de ces sommes, les composantes qu'on y avait fait entrer. Pourquoi la méthode suivie par Sabine devait conduire à des conclusions inexactes, et comment est née celle que je propose, ce sont là des points exposés avec détail dans le Mémoire en question: le présent travail a pour objet, en premier lieu, de faire l'épreuve de la méthode sur des données arbitrairement choisies, en second lieu, d'améliorer quelques-unes des corrections précédemment indiquées, enfin, de répondre à différentes observations et objections qui m'ont été obligeamment adressées. Tant la définition que la méthode deviendront claires par l'application qui va en

---

1) *Bulletin de la Commission polaire internationale*, 6e livraison, St.-Pétersbourg, 1884.

être faite, de sorte que, à leur égard, je puis renvoyer au Mémoire précité.

Dans le tableau I on trouve, pour cinq jours successifs, des observations horaires artificiellement composées, de la manière dont je me figure composées les résultantes réellement observées. Ces cinq jours sont empruntés à mon travail sur la force horizontale en octobre 1882 à Batavia, et ils ne sont donc pas entièrement hypothétiques; pour mieux faire ressortir les difficultés, j'ai choisi des jours assez fortement troublés (22—26 oct.).

Comme on le voit, chaque observation est formée de *trois* composantes. En premier lieu, il y a les nombres fondamentaux, à changements *lents* et *continus*: ils expriment le mouvement que l'aiguille aimantée présenterait s'il n'y avait ni variation diurne, ni perturbations. Rien n'est connu au sujet de ce mouvement: M. Allan Broun pensait qu'il devait être, au moins en ce qui concerne la force horizontale, le même sur tout le globe, et des observations postérieures paraissent confirmer cette opinion; mais, faute de bonnes observations comparables, le sujet n'a pas encore été beaucoup étudié, et jusqu'ici on n'a découvert, dans le mouvement en question, ni ordre régulier, ni dépendance de quelque cause connue, cosmique ou terrestre.

La seconde composante est la mieux connue, c'est la variation diurne. Celle-ci, périodique sur un espace de 24 heures, est, pour la force horizontale, très grande à Batavia, moitié moindre à Pawlowsk. Pour le premier jour, ces variations sont inscrites dans le tableau telles qu'elles ont été trouvées à Batavia par deux mois d'observations (septembre et octobre); le second jour on a appliqué (la valeur de ces premières variations étant prise pour unité) une variation 0,75, le troisième jour une variation 1,25, le quatrième une variation 1,50, et le cinquième jour, enfin, une variation 0,25.

Les courbes de Batavia, où le mouvement est plus grand qu'aux latitudes plus élevées, font voir clairement que cette variation, même lorsque la courbe offre une allure bien continue

et est par conséquent exempte de perturbations prononcées, peut différer notablement à des jours différents; cela est d'ailleurs tout naturel, puisqu'on sait que la variation dépend du nombre des taches existant à la surface du Soleil. Comme ce mouvement a lieu surtout aux heures où le Soleil est le plus élevé au-dessus de l'horizon, la continuité de l'allure, d'un jour à l'autre, n'est pas nécessaire.

La troisième composante, enfin, est la perturbation, dont la définition devient par conséquent celle-ci: est considéré comme perturbation tout mouvement de l'aiguille qui n'offre pas une allure continue pendant un temps un peu long et qui n'est pas congru au mouvement périodique diurne déduit de 2 mois d'observations. Une période diurne peut donc, suivant cette définition, exister pour les perturbations, à condition qu'elle ne soit pas semblable à la variation proprement dite, cas, en effet, où logiquement il n'y aurait plus aucune différence à indiquer entre la marche diurne et la perturbation, et où certainement on ne parviendrait jamais à trouver une méthode de séparation pour ces grandeurs semblables. — Comme on le voit, c'est surtout le quatrième jour (25 oct. 1882) qui est fortement troublé.

Le problème à résoudre revient donc à ceci: Etant connues les sommes de ces composantes (tableau A), et en outre la variation diurne moyenne, telle qu'elle a été calculée au moyen de 2 mois d'observations et appliquée au premier jour, en déduire de nouveau les trois composantes du tableau I. Une solution directe et complète de ce problème ne peut naturellement être trouvée; par approximation, toutefois, il est possible d'obtenir entre les données et le calcul un accord d'autant plus grand qu'on voudra se donner plus de peine pour effectuer l'opération. Les conditions à imposer à la méthode sont: 1° que déjà la première approximation fournisse des résultats assez satisfaisants pour qu'on puisse l'appliquer à la grande masse des observations, sans que la somme de travail devienne trop considérable pour la pratique; 2° que, en ne tenant pas compte de la quantité de travail, on soit en état d'atteindre, avec une sûreté presque complète, une

période plus courte, même pour de petites perturbations. Dans le premier cas, le grand nombre des déviations trouvées compensera ce qui manque en exactitude aux petites perturbations. De sa nature même, l'opération se divise donc en trois parties:

1°. Calcul des premières composantes, qui varient lentement et d'une manière continue (valeurs primordiales).

La méthode découle de la définition même des trois grandeurs. Les moyennes diurnes 110, 84, 89, 98 et 66 seront indépendantes de la variation diurne, parce que celle-ci est *périodique*; elles seront égales aux valeurs primordiales au milieu du jour, c'est-à-dire à $12^h,5$, parce que ces valeurs ont une marche *continue*; enfin, l'erreur occasionnée par les perturbations sera égale à la différence des sommes des perturbations positives et négatives divisée par 24. Si une perturbation est constamment positive pendant une durée plus longue qu'un jour, la valeur moyenne, à la vérité, n'est pas égale à la valeur primordiale donnée: mais alors aussi cette perturbation n'est pas discontinue et, suivant la définition même, ne doit pas être regardée tout entière comme perturbation, mais en partie comme amplification de la valeur primordiale, en partie comme perturbation; dans ce cas, le calcul lui-même dissiperait donc l'équivoque des données et rapporterait la partie continue là où, logiquement, est sa place.

Si l'on prend, de la même manière, la moyenne pour la période date 1, heure 2, à date 2, heure 1 inclusivement, période à laquelle correspondra donc la somme 2649 — 111 + 61, le même raisonnement pourra être appliqué pour $13^h,5$; seulement, pour cette heure et les heures suivantes, jusqu'à la date 2, heure 12,5, la variation diurne n'est pas entièrement éliminée: lorsque les variations successives sont très différentes entre elles, comme par exemple au passage de la date 4 à la date 5, la moyenne obtenue est affectée d'une erreur dépendant de la différence de ces variations, différence qui à son tour dépend de la grandeur absolue du mouvement périodique. Aux latitudes boréales cette erreur sera donc toujours petite; à Batavia, pour les cas rares où les variations qui se succèdent

diffèrent beaucoup entre elles, la source d'erreurs en question ne pourrait pas être négligée. Une autre cause d'erreurs doit être cherchée dans les maxima et minima que présentera nécessairement le mouvement des valeurs primordiales; ces erreurs aussi seront petites, pourvu que, conformément à la définition, le mouvement soit lent et continu: s'il est abrupt, elles rentrent dans les perturbations. Plus loin, en traitant de la seconde élaboration, je ferai connaître une méthode de correction préférable à celle que j'avais proposée dans mon premier Mémoire sur ce sujet.

Les nombres primordiaux ainsi calculés sont réunis dans le tableau B. Le nombre valable pour $12^h,5$ est incrit à l'heure 12; les 10 premiers et les 12 derniers nombres ont été calculés en supposant que, dans le tableau I, les données primordiales s'étendent encore un demi-jour en deçà et au delà, avec le même changement et la même variation diurne, sans perturbations.

2°. Calcul de la variation diurne.

En retranchant les valeurs primordiales approchées, obtenues comme il vient d'être dit, des nombres du tableau A, on trouve les différences du tableau C, dans lesquelles il ne reste donc plus que les perturbations et le mouvement diurne. S'il n'y avait pas de perturbations, ou si elles se compensaient mutuellement, sans participer à la période du mouvement diurne, la somme des susdites différences (la somme positive serait égale à la somme négative) donnerait la mesure exacte de la variation, et cette somme, divisée par 400 (somme des variations du jour 1, déduite de 2 mois d'observations), ferait connaître le nombre proportionnel ou coefficient d'amplitude de ce mouvement. Lorsque la somme des déviations positives n'est pas égale à celle des négatives, mais, par exemple, plus grande, la cause doit en être cherchée dans les perturbations, qui ont rendu les déviations négatives plus petites, les positives plus grandes; dans ce cas, ou bien il y a eu dans les perturbations une période, qui a contrecarré la variation proprement dite, ou bien les valeurs primordiales employées avaient, par suite de l'influence de ces perturbations, été calculées trop bas. En supposant que tous les

nombres positifs soient trop forts de la quantité a, tous les nombres négatifs trop faibles de cette même quantité a, il en résultera, — puisque dans notre cas, emprunté à Batavia, il y a 8 déviations positives et 16 déviations négatives, — qu'en général, si a est petit, la somme totale sera trop faible de $8\,a$, tandis que la différence des sommes positive et négative sera égale à $24\,a$: la correction est donc du tiers de la différence des deux sommes. Si c'est la somme des déviations négatives qui est plus grande que l'autre, la période est trouvée trop forte et l'on doit en retrancher un tiers de la différence des deux sommes. Comme exemple de cette correction, je citerai le 4[e] jour, qui donne les sommes + 319 et — 213 : la mesure de la variation diurne devient donc

$$\frac{319 + 213 + \dfrac{319 - 213}{3}}{400} = 1{,}42.$$

Pour les latitudes septentrionales, où l'on trouve, au contraire, 16 déviations positives et 8 négatives, la correction, bien entendu, sera de signe opposé.

Une seconde correction qu'on peut déjà appliquer ici, facilement et sûrement, consiste à ne pas faire entrer dans la somme les déviations positives qui se présentent à des heures négatives, ni les déviations négatives qui correspondent à des heures positives : on rejette ces heures, comme indubitablement affectées de perturbations, et on prend alors pour unité, non plus la somme 400, mais seulement la somme des variations normales aux heures employées. Cette correction n'a pas été faite dans notre cas, parce qu'on n'y rencontre pas des différences très grandes, capables d'exercer une influence un peu sensible; mais dans un cas de fortes perturbations, tel que celui du 2 octobre, la correction pourrait être absolument nécessaire. En opérant de cette manière, la variation trouvée sera, en général, un peu trop grande; là seulement où, comme le 4[e] jour, les perturbations elles-mêmes accusent distinctement une période, opposée à celle du jour normal, on trouve une variation trop faible. L'erreur ainsi commise est

proportionnelle à à la déviation normale pour une heure déterminée: à Batavia, une différence de un dixième dans le coefficient d'amplitude de la variation diurne calculée donne déjà, à onze heures, une différence de 4 unités; la méthode convient donc mieux pour les localités où la variation diurne est petite que pour celles où elle a une valeur plus considérable.

3°. Si l'on retranche enfin, des nombres du tableau C, les variations diurnes prises approximativement proportionnelles aux coefficients d'amplitude qui viennent d'être calculés, variations inscrites au tableau C′, on obtient la première approximation pour la troisième composante, tableau D. Les plus grandes différences entre ces perturbations et les déviations données se trouvent, ainsi qu'il était à prévoir, aux heures des plus grandes variations diurnes. Si, les autres données restant les mêmes, on avait appliqué la variation diurne de St. Pétersbourg, l'approximation obtenue eût été beaucoup meilleure. On voit que la *période* existant *dans les perturbations* du 4e jour a aussi été distinctement conservée, et on peut admettre que pour les lieux de haute latitude la méthode fournira de bons résultats; pour les stations équatoriales, toutefois, une correction ultérieure des variations diurnes calculées paraît désirable.

Je ne crois pas qu'avec une peine moindre on puisse arriver à des résultats également bons; si toutefois le travail exigé était impossible, ce qu'il y aurait de mieux à recommander, pour les hautes latitudes, serait une combinaison de notre méthode avec celle proposée par M. le professeur Wild pour le triage de jours où le mouvement diurne est clairement reconnaisable. Une variation normale ayant été trouvée de cette manière, par un ou plusieurs mois d'observations, cette variation pourrait être regardée comme valable pour tous les jours, et en la retranchant des différences du tableau C, on parviendrait plus rapidement aux perturbations. A Batavia ce procédé ne serait pas applicable: la variation diurne y est plus de deux fois aussi grande qu'à Pawlowsk, tandis que les perturbations (de la force horizontale), tout en n'y étant guère plus petites (la somme des perturbations trouvées

par cette méthode, pour un même mois, est à Batavia 6 449, à Pawlowsk 6 876 cent-millièmes de l'unité C. G. S.), sont beaucoup plus larges et moins abruptes : ce n'est que dans le cas de perturbations très fortes qu'on remarque à Batavia les mouvements en zigzag, à saillies en forme de piques, si bien connus à Pawlowsk. Il en résulte que dans toutes les courbes, sans distinction, la variation diurne est immédiatement reconnaissable, et qu'un triage à vue n'est donc guère possible.

En tout cas, le premier de nos calculs devrait être exécuté, si l'on ne veut pas confondre avec les perturbations les très grandes différences qui se rencontrent dans les valeurs primordiales, et retomber ainsi dans l'incertitude antérieure de la définition.

Au reste, une grave objection s'élève contre l'économie de temps dont il vient d'être question: par elle, on renoncerait à l'étude de la variation diurne elle-même et des changements auxquels elle est soumise, étude qui, précisément, promet de devenir féconde pour la connaissance de l'état journalier du Soleil. Les perturbations proprement dites, en effet, paraissent dépendre de la naissance et de la disparition des taches, plutôt que de leur nombre à un moment donné.

La seconde partie de notre tâche concerne la question de savoir jusqu'à quel point la méthode proposée peut servir à une étude descendant aux détails, mais limitée à un petit nombre de jours, et pour laquelle, en conséquence, il n'y a pas à se préoccuper de la somme de travail nécessaire.

Je suppose donné le calcul, suivant la méthode ci-dessus exposée, d'une période de quelque durée. La première opération à faire, pour obtenir des valeurs primordiales plus exactes, est de corriger les observations horaires de l'influence des plus fortes perturbations trouvées par approximation (tableau D). Dans le tableau AA cette correction a eu lieu pour toutes les perturbations supérieures ou égales à 15, qui à cet effet ont été appliquées, avec un signe contraire, aux nombres du tableau A.

Après avoir déduit des nombres du tableau AA les nouvelles moyennes de 24 heures (tableau B', première colonne de chaque jour), il s'agit d'améliorer celles-ci. Une première source d'erreurs dont elles sont affectées résulte, comme nous l'avons déjà dit, de l'inégalité des variations diurnes. La correction à faire de ce chef, aux *sommes* du tableau *B'*, est facile à déduire du tableau *C'*: dans les secondes colonnes du tableau B' on trouve les valeurs ainsi corrigées; surtout pour le passage du 4e au 5e jour, les différences ne sont pas négligeables.

Si cette correction n'a d'importance que dans le cas assez rare où une grande et une très petite variation diurne se succèdent immédiatement, la seconde source d'erreurs, à savoir l'existence de maxima et de minima dans les valeurs primordiales, se présentera plus fréquemment. D'après le mode de calcul appliqué ici, on prend chaque fois la moyenne des 11 nombres antérieurs et des 12 nombres postérieurs: en désignant par x le nombre cherché, par b le changement des nombres antérieurs pour chaque heure, par a celui des nombres postérieurs, on trouvera donc, pour l'heure x, la somme

$$24\,x + 78\,a + 66\,b, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

ou pour la moyenne

$$x + 3{,}25\,a + 2{,}75\,b = x + \frac{13\,a + 11\,b}{4}.$$

Si le point x se trouve sur une ligne droite ascendante, b est négatif et égal à a, de sorte que la moyenne devient:

$$x + 0{,}5\,a\,;$$

on fait donc une erreur $0{,}5\,a$, ce qui est naturel, puisque la moyenne, qui vaut pour $12^h{,}5$, est inscrite à 12 heures. L'erreur commise $\frac{13\,a + 11\,b}{4}$ est toutefois le plus grand en cas de valeurs maximum ou minimum, parce que a et b sont alors de même signe. Lorsque la force baisse rapidement et notablement, comme cela a eu lieu du 2 au 3 octobre 1882 (tant à Batavia qu'à

Pawlowsk), les accroissements a et b peuvent atteindre une valeur de cinq unités et plus: il pourra donc être commis une erreur de 30 unités, d'où il résultera non-seulement qu'un maximum sera trouvé beaucoup plus petit, un minimum plus grand, mais aussi qu'il pourra s'opérer un déplácement, dont l'étendue dépendra du rapport des quantités a et b. C'est ainsi que, le quatrième jour, on trouve le maximum 104 réduit à 98, et en outre reculé de la 16e à la 7e heure, tandis qu'à l'heure 16, au lieu du nombre cherché 104, on rencontre, pour valeur primordiale, le nombre 92. Pour calculer la correction à faire, et en même temps le déplacement produit, on remarquera que les sommes, aux heures qui suivent celle où se trouve la valeur minimum x, sont:

$$24\,x + 78\,a + 66\,b + 12\,a - 12\,b + a + b$$
$$24\,x + 78\,a + 66\,b + 24\,a - 24\,b + 3\,a + 3\,b$$
$$24\,x + 78\,a + 66\,b + 36\,a - 36\,b + 6\,a + 6\,b.$$

Le $n^{\text{ième}}$ terme, compté à partir de l'heure x, est donc:

$$24\,x + 78\,a + 66\,b + 12\,(a - b)\,n + (1 + 2 + \ldots . n)\,(a + b)$$

ou

$$24\,x + 78\,a + 66\,b + 12\,(a - b)\,n + \frac{n\,(n+1)}{2}\,(a + b)$$

$$S_n = 24\,x + 78\,a + 66\,b + (12{,}5\,a - 11{,}5\,b)\,n + 0{,}5\,(a + b)\,n^2 \quad (2)$$

Cette formule ne convient que pour les limites $n = +\ 11$ et $n = -\ 11$. En effet, pour 12 heures avant et après le minimum, les moyennes seront respectivement:

$$x + 11{,}5\,b \quad \text{et} \quad x + 12{,}5\,a.$$

La somme (2) atteint sa valeur la plus petite lorsque

$$n = \frac{11{,}5\,b - 12{,}5\,a}{a + b}.$$

Ce déplacement est positif, c'est-à-dire un avancement, lorsque $b > a$, négatif, c'est-à-dire un recul, lorsque $a < b$; ou, d'une manière générale, le déplacement s'opère vers le côté du change-

ment le plus petit. Il ne dépend pas de la grandeur absolue des changements, mais seulement de leur rapport, et il peut s'élever jusqu'à un maximum de 11,5 places en avant et de 12,5 places en arrière.

Supposons $b > a$, le déplacement est positif et la valeur la plus petite est donc trouvée trop tard: le 12[ième] terme après cette valeur M_1 se trouve alors certainement en dehors de l'influence de la valeur minimum x: c'est le $12 + \frac{11.5\,b - 12.5\,a}{a+b}$ ième terme après x, et cette moyenne M_2 est, d'après . . . . (3),

$$M_2 = x + 12.5\,a + \frac{11.5\,b - 12.5\,a}{a+b}\,a$$

ou

$$M_2 = x + \frac{24\,a\,b}{a+b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Quant à la plus petite valeur trouvée M_1, elle est le

$$\frac{11.5\,b - 12.5\,a}{a+b} \text{ ième terme après } x;$$

en substituant cette expression à n dans la formule (2) et divisant par 24, nous trouvons, après réduction:

$$M_1 = x + \frac{12\,ab}{a+b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Le 11,5[ième] terme avant M_1 est le

$$11.5 - \frac{11.5\,b - 12.5\,a}{a+b} = \frac{24\,a}{a+b} \text{ ième terme avant } x,$$

et par conséquent, d'après la form. (2),

$$M_0 = x + \frac{12\,a\,b}{a+b} + \frac{11\,(a+b)}{4}.$$

De cette formule et des deux précédentes, on déduit:

$$x = 2\,M_1 - M_2 \qquad \frac{ab}{a+b} = q = \frac{M_2 - M_1}{12} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$$a + b = p = \frac{4\,(M_0 - M_1)}{11} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

Il résulte de là que les quantités cherchées a et b sont les racines d'une équation du second degré, dans notre cas:

$$\begin{aligned} b &= 0.5\,p + \sqrt{0.25\,p_2 - p\,q} \\ a &= 0.5\,p - \sqrt{0.25\,p^2 - p\,q} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

Lorsqu'il ne ressort pas clairement des moyennes trouvées lequel des deux changements est le plus grand, le cas est généralement peu prononcé et la correction inutile; du reste, la formule (8) elle-même fera connaître si l'on a deviné juste : dans le cas contraire, en effet, l'expression radicale devient imaginaire.

Si $a > b$, le 12ième terme avant la plus petite valeur trouvée M_1 se trouve en dehors de l'influence du minimum, et pour le calcul de la quantité auxiliaire p on emploie alors le 12,5ième terme après M_1 ; on trouve

$$\begin{aligned} x = 2\,M_1 - M_0 : \ \frac{a\,b}{a+b} = q = \frac{M_0 - M_1}{12} \\ a + b = p = \frac{4\,(M_2 - M_1)}{13} \ . \end{aligned} \quad (9)$$

Le plus souvent, comme dans notre exemple, on pourra déterminer facilement l'une des deux quantités. L'exemple est mal choisi, en ce sens que ni le minimum du 2e jour, ni le maximum du 4e jour ne sont fortement exprimés; la méthode exposée sera d'autant plus exacte que les différences entre M_0, M_1 et M_2 deviendront plus grandes; lorsque ces différences sont petites, comme ici, il se pourrait, à cause des perturbations imparfaitement éliminées, que la méthode donnât des résultats inexacts: alors aussi, toutefois, la correction est inutile. Dans les cas, tels que le nôtre, où l'abaissement est lent, on fera mieux de déterminer immédiatement les quantités a et b à une distance suffisante de M_1, en prenant à cette distance la moyenne de la variation horaire. A la 5ième heure du 2ième jour, l'accroissement

commence à devenir régulier et égal 1, et 12 heures après M_1 on le trouve encore tout aussi régulier et égal à 0,5.

Il est plus sûr toutefois, en pareil cas, de ne déterminer l'accroissement que là où l'influence du minimum a indubitablement cessé. Dans notre cas, par exemple, on a $b > a$; le 12ième terme après 84 est 88, et l'accroisement en ce point est manifestement égal à 0,5; on a donc

$$2\,M_1 - M_2 = x = 168 - 88 = 80$$

$$\frac{a\,b}{a+b} = \frac{M_2 - M_1}{12} = \frac{1}{3} = q,$$

d'ou il suit immédiatement:

$b = 1$ et le déplacement $\frac{11{,}5\,b - 12{,}5\,a}{a+b} = 3{,}5$, soit de 4 places.

Le minimum 84, trouvé à la 22ième heure, doit donc être reculé de quatre places et abaissé à la valeur 80, et à partir de ce nouveau minimum doivent être appliqués les changements horaires 0,5 et 1.

En ce qui concerne le maximum $M_1 = 98$, on a $a > b$, de sorte qu'il faut appliquer la formule (9); on a $M_0 = 93$, et le 12ième terme après M_1 est $M_2 = 89$; on trouve donc

$$x = 103 \quad a = 2{,}27 \quad b = 0{,}51$$

et un déplacement de 8 heures en avant.

Conformément à ces données on a construit à nouveau le tableau des valeurs primordiales (tableau BB): les 12 premières et les 12 dernières valeurs y sont simplement inscrites à vue. Les nombres de ce tableau donnent, comme on le voit, des valeurs qui se rapprochent déjà beaucoup des valeurs réellement données.

Les nombres du tableau BB étant à leur tour soustraits de ceux du tableau AA, on trouve (tableau CC) des différences qui peuvent être considérées comme ne comprenant plus que la variation diurne et la perturbation; il paraît donc convenable de ne *pas* appliquer ici la correction à laquelle a été soumis le tableau C,

mais de ne tenir compte (en excluant les différences de la 15ième heure) que des sommes des différences positives et négatives: on reconnaîtra si l'on s'est déjà rapproché davantage de la vérité, à l'inégalité moindre des sommes positives et négatives. Effectivement, celles-ci n'offrent plus de différences que pour le 4ième jour, à fortes perturbations. Le dernier jour on a aussi, suivant une correction indiquée précédemment, exclu du calcul les différences positives des heures 4, 6, 18 et 22, et, en conséquence, on a obtenu le coefficient d'amplitude en divisant la somme par 353, au lieu de 400.

Omettant le tableau dans lequel auraient été inscrites les nouvelles variations diurnes (calculées à l'aide des coefficients d'amplitude placés au bas du tableau CC), nous nous bornerons à donner, dans le tableau DD, la seconde approximation des perturbations. Dans la pratique, en effet, on n'écrit pas le tableau C', mais le calcul de la variation diurne se fait à vue, au moyen d'un tableau de multiplication de la variation normale. Il ne m'a pas semblé qu'il valût la peine de chercher à établir, entre les perturbations calculées et données, un accord plus étroit que celui obtenu par cette seconde approximation. Je ferai remarquer, d'ailleurs, que pour un jour peu troublé, tel que le 3ième, les perturbations calculées sont presque exactement égales aux perturbations données, et que les 5 jours pris pour exemple doivent très certainement être comptés parmi les cas défavorables. C'est même pour cette raison que je les ai choisis, au lieu de m'en tenir aux valeurs arbitraires composées antérieurement [1]: dans ce premier exemple, les perturbations étaient trop petites et distribuées trop favorablement pour la méthode. Enfin, je rappellerai que les différences les plus grandes entre le calcul et les données se trouvent aux heures des plus grandes variations diurnes, et que par conséquent, à des latitudes plus élevées, l'approximation aurait conduit à des résultats plus exacts.

---

[1]) *Bulletin* etc., *l.c.*

Il reste encore à résoudre une question concernant la définition de la perturbation. Supposons que la force, après avoir atteint un maximum, baisse rapidement et devienne un minimum, puis se remette lentement à croître: dans la définition il n'a été parlé que de mouvements lents et continus, nous devons donc tâcher d'éclaircir ces notions. Pour cela, il est nécessaire de donner une petite extension à la théorie ci-dessus développée sur la moyenne de nombres qui se meuvent suivant des lignes droites. Lorsqu'un minimum succède à un maximum, différents cas peuvent se présenter. En premier lieu, il est possible (si l'on a, par exemple, $s > b > a$, ce qui sera bien le cas le plus fréquent) que p, la distance du maximum x au minimum y, soit si grand, que les deux valeurs M_1 et M'_1, les extrêmes calculées, peuvent être obtenues de la manière ordinaire, au moyen des formules (6) et (9); la formule auxiliaire (7), toutefois, et en général les grandeurs situées entre x et y, ne peuvent plus être employées. Par contre, on connaît maintenant la distance A de M_1 à M'_1, de sorte que le calcul reste possible et simple. Les déplacements subis par M_1 et M'_1 sont respectivement

$$V_1 = -\frac{12.5s - 11.5b}{b+s} \quad \text{et} \quad V_2 = +\frac{11.5s - 12.5a}{a+s},$$

valeurs liées entre elles par l'équation:

$$-V_1 + V_2 + p = A.$$

Pour déterminer les 6 quantités x, y, a, b, s et p, on a donc les relations:

$$x = 2M_1 - M_0, \quad y = 2M'_1 - M'_2$$

$$\frac{bs}{b+s} = \frac{M_1 - M_0}{12} = q_1; \quad \frac{as}{a+s} = \frac{M'_2 - M'_1}{12} = q_2 \quad \ldots \quad (10)$$

$$p = \frac{x-y}{s} = \frac{V}{s}$$

$$\frac{12.5s - 11.5b}{b+s} + \frac{11.5s - 12.5a}{a+s} + p = A, \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

d'où l'on tire:

$$s = \frac{V - 24\,(q_1 + q_2)}{A - 24} = \frac{M_1 - M'_2}{A - 24}, \quad \ldots \ldots (12)\,^{1)}$$

puis, pour les déplacements:

$$V_1 = \frac{24\,q_1 - 12.5\,s}{s} \qquad V_2 = \frac{11.5\,s - 24\,q_2}{s}.$$

Supposons maintenant p très petit, de sorte que tant la moyenne pour l'heure x que celle pour l'heure y contiennent la période p tout entière: donc $p < 12$. En considérant que la somme des p termes après le maximum x est

$$p\,y + \frac{p\,(p-1)}{2}\,s,$$

et qu'on a aussi

$$y = x - p\,s,$$

on trouve pour la somme à l'heure x:

$$S = 24\,x + 78\,a - 66\,b - 12.5\,p\,(a + s) + 0.5\,p^2\,(a + s)$$

et pour les termes suivants:

$$S = 24\,x - 78\,a + 66\,b - (12.5 + n)\,(a + s)\,p + 12\,n\,(a + b)$$
$$+ \frac{n\,(n+1)}{2}\,(a - b) + 0.5\,p^2\,(s + a),$$

ou, en posant

$$k = 24\,x + 78\,a - 66\,b$$
$$F = k + 0.5\,p\,(p - 25)\,(s + a)$$
$$l = 12.5\,a + 11.5\,b - p\,(s + a)$$
$$j = 0.5\,(a - b),$$

$$S^x_n = F + l\,n + j\,n^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

---

1) La formule (12) cesse d'être applicable dans le cas de $A = 24$; alors, en appelant S_1 la somme des cinq sommes avant la somme M_1, S_2 la somme des cinq sommes après M_1, on trouve facilement, au moyen de la formule (2), la relation $b + s = \frac{s_1 + s_2 - 10\,M_1}{55}$, et les valeurs de b et s seront encore les deux racines de l'équation $z^2 - p\,z + p\,q = 0$.

Le terme général, compté à partir du minimum y, devient alors:

$$S_n^y = F' + l'n + j'n^2, \quad \dots\dots\dots\dots (14)$$

où

$$F' = 24\,y + 78\,a - 66\,b - 0.5\,p\,(p - 23)\,(s + b)$$
$$l' = 12.5\,a + 11.5\,b - p\,(s + b)$$
$$j' = 0.5\,(a - b).$$

Ces deux formules valent seulement pour les sommes qui s'étendent sur toute la distance p, donc du $12-p^{\text{ième}}$ terme avant x jusqu'au $11-p^{\text{ième}}$ terme après x, c'est-à-dire sur $23-p$ termes.

En différentiant les sommes (13) et (14) et égalant à 0, nous trouvons pour n les valeurs:

$$V_1 = -\frac{l}{2j} = -\frac{12.5\,a + 11.5\,b - p\,(s + a)}{a - b} \quad \dots\dots (15)$$

$$V_2 = -\frac{l'}{2j} = -\frac{12.5\,a + 11.5\,b - p\,(s + b)}{a - b} \quad \dots\dots (16)$$

La formule (15) est applicable entre les limites

$$V_1 = p - 12 \text{ et } V_1 = 11,$$

la formule (16) entre les limites

$$V_2 = -12 \text{ et } V_2 = 11 - p.$$

Il suit de là que, pour des changements donnés a, b et s, le cas ci-dessus se présentera si p est situé entre les limites:

$$\frac{0.5\,a + 23.5\,b}{b + s} \text{ et } \frac{23.5\,a + 0.5\,b}{a + s},$$

circonstance à laquelle on devra avoir égard lorsqu'il s'agira d'appliquer les formules à un cas spécial quelconque.

Des formules (15) et (16) il résulte que jamais le maximum et le minimum ne tombent tous les deux entre ces limites; par soustraction on trouve, en effet,

$$V_1 - V_2 = p,$$

ce qui signifie que la valeur maximum de l'une des formules coïncide avec la valeur minimum de l'autre. On arrive au même résultat, naturellement, en substituant (15) et (16) à n dans les formules (13) et (14); on obtient alors:

$$S^x - S^y = 0.$$

On ne pourra donc pas toujours reconnaître, par les sommes ou moyennes calculées, quels étaient les nombres primordiaux. Si p est petit, cela devient impossible; mais alors aussi le mouvement n'est pas imputable aux valeurs primordiales, mais aux perturbations. La limite cherchée entre la définition des perturbations et celle du premier mouvement continu gît donc dans la possibilité même de reconnaître l'état en question.

LA HAYE, août 1884.

Tableau I.

	1	2	3	4	5	Som
1	120—16+ 7	96—12—13	84—20+ 4	96—24+17	86 — 4 — 1	+28–[illegible]
2	119—14+ 2	95—11— 2	85—18+ 3	97—21+14	84 — 4 + 16	+35–[illegible]
3	118—12— 2	94— 9— 6	85—15+ 4	97—18+15	82 — 3 + 9	+23–[illegible]
4	117—10— 2	93— 8+ 8	86—13+ 6	98—15+20	80 — 3 + 4	+38–[illegible]
5	116— 8— 2	92— 6 0	86—10+ 5	98—12+26	78 — 2 — 3	+31–[illegible]
6	115— 6— 2	91— 5+ 5	87— 8+ 2	99— 9+37	76 — 2 + 1	+45–[illegible]
7	114+ 6— 5	90+ 5— 1	87+ 8 0	99+ 9+ 8	74 + 2 + 3	+11–[illegible]
8	113+15— 3	89+12+10	88+19 0	100+23— 2	72 + 4 + 2	+12–[illegible]
9	112+30+ 2	88+23+13	88+38— 5	100+45— 4	70 + 8 + 6	+21–[illegible]
10	111+40+ 4	87+30+ 4	89+50— 2	101+60+ 8	68 + 10 + 8	+24–[illegible]
11	110+42+ 2	86+32— 4	89+53+41	101+63— 3	66 + 11 + 10	+53–7[illegible]
12	109+40+ 8	85+30— 5	90+50+ 2	102+60—30	64 + 10 + 5	+15–[illegible]
13	108+20+ 9	84+15—12	90+25—17	102+30—47	62 + 5 — 4	+ 9–[illegible]
14	107+ 8+12	83+ 6—13	91+10 0	103+12—48	60 + 2 — 12	+12–[illegible]
15	106 0+18	82 0— 8	91 0—12	103 0—41	58 0 + 1	+19–[illegible]
16	105— 8+19	81— 6—10	92—10—19	104—12—29	56 — 2 — 3	+19–[illegible]
17	104—10+14	80— 8—20	92—13—18	102—15—24	54 — 3 0	+14–[illegible]
18	103—12+14	81— 9— 1	93—15—12	100—18—10	52 — 3 + 4	+18–[illegible]
19	102—14+ 7	81—11 0	93—18—13	98—21— 3	50 — 4 + 4	+11–[illegible]
20	101—16— 4	82—12— 1	94—20 0	96—24+11	48 — 4 + 2	+13–[illegible]
21	100—19—11	82—15+18	94—24— 5	94—29+15	46 — 5 — 4	+33–[illegible]
22	99—19—16	83—15+ 6	95—24+ 2	92—29+24	44 — 5 + 6	+38–[illegible]
23	98—18—12	83—14— 1	95—23+ 2	90—27+18	42 — 5 + 1	+21–[illegible]
24	97—17—16	84—14— 3	96—22— 2	88—26+17	40 — 5 + 14	+31–[illegible]
	+118	+ 64	+ 71	+230	+ 96	+[illegible]
	— 75	—100	—105	—241	— 27	—[illegible]
	193	164	176	471	123	1[illegible]

	Tableau A.					Tableau B.				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	111	61	68	89	81	120	95	88	97	78
2	107	82	70	90	96	120	93	89	96	77
3	104	79	74	94	88	120	91	89	95	77
4	105	93	79	103	81	119	88	89	95	76
5	106	86	81	112	73	119	86	89	95	76
6	107	91	81	127	75	119	85	89	95	75
7	115	94	95	116	79	118	84	89	96	74
8	125	111	107	121	78	117	83	89	96	72
9	144	124	121	141	84	115	84	88	97	71
10	155	121	137	169	86	114	84	88	97	69
11	154	114	183	161	87	112	84	88	98	67
12	157	110	142	132	79	110	84	89	98	66
13	137	87	98	85	63	108	85	89	98	64
14	127	76	101	67	50	107	84	90	98	61
15	124	74	79	62	59	106	84	91	98	59
16	116	65	63	63	51	106	83	92	97	57
17	108	52	61	63	51	105	83	93	95	55
18	105	71	66	72	53	104	83	95	93	53
19	95	70	62	74	50	103	83	96	91	51
20	81	69	74	83	46	103	83	97	90	49
21	70	85	65	80	37	102	82	98	87	46
22	64	74	73	87	45	101	83	99	84	44
23	68	68	74	81	38	99	86	98	81	41
24	64	67	72	79	49	97	87	98	78	39
	2649	2024	2126	2351	1579					

Tableau C.

	1	2	3	4	5
1	— 9	—34	—20	— 8	+ 3
2	—13	—11	—19	— 6	+19
3	—16	—12	—15	— 1	+11
4	—14	+ 5	—10	+ 8	+ 5
5	—13	0	— 8	+17	— 3
6	—12	+ 6	— 8	+32	0
7	— 3	+10	+ 6	+20	+ 5
8	+ 8	+28	+18	+25	+ 6
9	+29	+40	+33	+44	+13
10	+41	+37	+49	+72	+17
11	+42	+30	+95	+63	+20
12	+47	+26	+53	+34	+13
13	+29	+ 2	+ 9	—13	— 1
14	+20	— 8	+11	—31	—11
15	+18	—10	—12	—36	0
16	+10	—18	—29	—34	— 6
17	+ 3	—31	—32	—32	— 4
18	+ 1	—12	—29	—21	0
19	— 8	—13	—34	—17	— 1
20	—12	—14	—23	— 7	— 3
21	—32	+ 3	—33	— 7	— 9
22	—37	— 9	—26	+ 3	+ 1
23	—33	—18	—24	0	— 3
24	—31	—20	—26	+ 1	+10
R.	1.2	1.0	1.5	1.4	0.5

Tableau C′.

	1	2	3	4	5
1	— 19	— 16	— 24	— 22	— 8
2	— 17	— 14	— 21	— 20	— 7
3	— 14	— 12	— 18	— 17	— 6
4	— 12	— 10	— 15	— 14	— 5
5	— 10	— 8	— 12	— 11	— 4
6	— 7	— 6	— 9	— 8	— 3
7	+ 7	+ 6	+ 9	+ 8	+ 3
8	+ 18	+ 15	+ 23	+ 21	+ 8
9	+ 36	+ 30	+ 45	+ 42	+ 15
10	+ 48	+ 40	+ 60	+ 56	+ 20
11	+ 50	+ 42	+ 63	+ 59	+ 21
12	+ 48	+ 40	+ 60	+ 56	+ 20
13	+ 24	+ 20	+ 30	+ 28	+ 10
14	+ 10	+ 8	+ 12	+ 11	+ 4
15	0	0	0	0	0
16	— 10	— 8	— 12	— 11	— 4
17	— 12	— 10	— 15	— 14	— 5
18	— 14	— 12	— 18	— 17	— 6
19	— 17	— 14	— 21	— 20	— 7
20	— 19	— 16	— 24	— 22	— 8
21	— 23	— 19	— 29	— 27	— 10
22	— 23	— 19	— 29	— 27	— 10
23	— 22	— 18	— 27	— 25	— 9
24	— 20	— 17	— 26	— 24	— 9

	Tableau D.					Tableau A A.				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	+ 10	— 18	+ 4	+ 14	+ 11	111	79	68	89	81
2	+ 4	+ 3	+ 2	+ 14	+ 26	107	82	70	90	70
3	— 2	0	+ 3	+ 16	+ 17	104	79	74	78	71
4	— 2	+ 15	+ 5	+ 22	+ 10	105	78	79	81	81
5	— 3	+ 8	+ 4	+ 28	+ 1	106	86	81	84	73
6	— 5	+ 12	+ 1	+ 40	+ 3	107	91	81	87	75
7	— 10	+ 4	— 3	+ 12	+ 2	115	94	95	116	79
8	— 10	+ 13	— 5	+ 4	— 2	125	111	107	121	78
9	— 7	+ 10	— 12	+ 2	— 2	144	124	121	141	84
10	— 7	— 3	— 11	+ 16	— 3	155	121	137	153	86
11	— 8	— 12	+ 32	+ 4	— 1	154	114	151	161	87
12	— 1	— 14	— 7	— 22	— 7	157	110	142	154	79
13	+ 5	— 18	— 21	— 41	— 11	137	105	119	126	63
14	+ 10	— 16	— 1	— 42	— 15	127	92	101	109	65
15	+ 18	— 10	— 12	— 36	0	106	74	79	98	59
16	+ 20	— 10	— 17	— 23	— 2	96	65	80	86	51
17	+ 15	— 21	— 17	— 18	+ 1	93	73	78	81	51
18	+ 15	0	— 11	— 4	+ 6	90	71	66	72	53
19	+ 9	+ 1	— 13	+ 3	+ 6	95	70	62	74	50
20	+ 7	+ 2	+ 1	+ 15	+ 5	81	69	74	68	46
21	— 9	+ 22	— 4	+ 20	+ 1	70	63	65	60	37
22	— 14	+ 10	+ 3	+ 30	+ 11	64	74	73	57	45
23	— 9	0	+ 3	+ 25	+ 6	68	68	74	56	38
24	— 13	— 3	0	+ 25	+ 19	64	67	72	54	30
						2581	2060	2149	2296	1532

	Tableau B'.										Tableau BB.				
	1		2		3		4		5		1	2	3	4	5
1	——		93	94	88	85	96	—	76	80	119	94	84	97	81
2	——		91	93	88	86	96	—	74	78	118	93	84	97	79
3	——		90	91	89	86	97	—	72	77	117	91	85	97	77
4	——		89	90	89	87	97	—	71	76	116	90	85	98	76
5	——		88	89	89	87	98	—	70	74	115	89	86	98	74
6	——		87	88	89	87	98	—	69	73	114	92	86	99	73
7	——		86	87	89	87	98	—	68	71	113	91	87	99	71
8	——		86	86	89	87	98	—	67	70	112	90	87	100	70
9	——		85	86	80	88	98	—	66	68	111	89	88	100	68
10	——		86	—	89	88	97	—	66	67	110	88	88	101	67
11	——		86	—	89	—	96	—	65	65	109	87	89	101	65
12	108	—	86	—	90	—	96	—	64	—	108	86	90	102	64
13	106	—	85	86	90	—	95	—	——		106	85	90	102	62
14	105	—	85	86	91	—	95	93	——		105	84	91	103	60
15	104	—	85	86	91	—	94	93	——		104	83	91	103	58
16	103	—	85	86	92	91	94	92	——		103	82	91	101	56
17	102	—	85	86	92	91	94	92	——		102	81	91	98	54
18	102	101	84	85	92	—	93	91	——		101	80	92	96	52
19	101	100	84	85	93	—	92	89	——		100	81	93	94	50
20	100	—	84	85	93	—	90	88	——		100	81	93	92	48
21	99	—	84	84	94	—	88	87	——		99	82	94	89	46
22	98	—	85	84	95	—	85	86	——		98	82	95	87	44
23	96	97	86	85	95	96	82	84	——		97	83	95	85	42
24	94	95	87	85	96	—	79	83	——		95	83	96	83	40

Tableau CC.

1	2	3	4	5
- 8	- 15	- 16	- 8	0
- 11	- 11	- 14	- 7	- 9
- 13	- 12	- 11	- 19	- 6
- 11	- 12	- 6	- 17	+ 5
- 9	- 3	- 5	- 14	- 1
- 7	- 1	- 5	- 12	+ 2
+ 2	+ 3	+ 8	+ 17	+ 8
+ 13	+ 21	+ 20	+ 21	+ 8
+ 33	+ 35	+ 33	+ 41	+ 16
+ 45	+ 33	+ 49	+ 52	+ 19
+ 45	+ 27	+ 62	+ 60	+ 22
+ 49	+ 24	+ 52	+ 52	+ 15
+ 31	+ 20	+ 29	+ 24	+ 1
+ 22	+ 8	+ 10	+ 6	+ 5
+ 2	- 9	- 12	- 5	+ 1
- 7	- 17	- 11	- 15	- 5
- 9	- 8	- 13	- 17	- 3
- 11	- 9	- 26	- 24	+ 1
- 5	- 11	- 31	- 20	0
- 19	- 12	- 19	- 24	- 2
- 29	- 19	- 29	- 29	- 9
- 34	- 8	- 22	- 30	+ 1
- 29	- 15	- 21	- 29	- 4
- 31	- 16	- 24	- 29	- 10
1.18	0.85	1.29	1.42	0.41

Tableau DD.

1	2	3	4	5	Somme.	
+ 11	- 19	+ 5	+ 15	+ 6	+ 37	- 19
+ 5	+ 1	+ 4	+ 13	+ 22	+ 45	- 0
+ 1	- 2	+ 4	+ 14	+ 16	+ 35	- 2
+ 1	+ 12	+ 7	+ 19	+ 9	+ 48	- 0
0	+ 4	+ 5	+ 25	+ 2	+ 36	- 0
0	+ 4	+ 3	+ 37	+ 4	+ 48	- 0
- 5	- 2	0	+ 8	+ 6	+ 14	- 7
- 5	+ 8	+ 1	0	+ 2	+ 11	- 5
- 2	+ 9	- 6	- 1	+ 5	+ 14	- 9
- 2	- 1	- 3	+ 11	+ 4	+ 15	- 6
- 5	- 8	+ 40	+ 1	+ 6	+ 47	- 13
+ 2	- 10	0	- 27	0	+ 2	- 37
+ 7	- 15	- 18	- 45	- 7	+ 7	- 85
+ 13	- 15	0	- 47	- 13	+ 13	- 75
+ 20	- 9	- 12	- 41	+ 1	+ 21	- 62
+ 22	- 10	- 18	- 27	- 2	+ 22	- 57
+ 18	- 20	- 17	- 21	+ 1	+ 19	- 58
+ 18	+ 1	- 11	- 7	+ 6	+ 25	- 18
+ 12	+ 1	- 14	0	+ 5	+ 18	- 14
0	+ 2	+ 2	+ 14	+ 4	+ 22	- 0
- 7	+ 19	- 4	+ 18	- 2	+ 37	- 13
- 12	+ 8	+ 3	+ 27	+ 8	+ 46	- 12
- 8	0	+ 2	+ 22	+ 3	+ 27	- 8
- 11	- 2	- 2	+ 20	+ 15	+ 35	- 15
+ 130	+ 69	+ 76	+ 244	+ 125		+ 644
- 57	- 113	- 105	- 216	- 24		- 515
187	182	181	460	149		1159

NOTE

SUR LE

DÉPLACEMENT D'UN SYSTÈME INVARIABLE DONT UN POINT EST FIXE,

PAR

M. T. J. STIELTJES.

---

1. On sait depuis Euler que ce déplacement se ramène toujours à une rotation autour d'un axe qui reste fixe.

Plusieurs auteurs ont établi ce théorème d'une manière purement analytique; je citerai en particulier Duhamel, qui a traité de ce sujet dans l'introduction de son Cours de mécanique.

Si je reviens sur cette matière, c'est pour mettre en lumière une difficulté inhérente à l'analyse suivie par Duhamel. On verra en effet que les formules données par cet auteur pour déterminer la position de l'axe de rotation, cessent de donner cette position dans un cas où elle est cependant parfaitement déterminée — je parle du cas où le déplacement se ramène à une rotation de 180°.

Soit O le point fixe, O_x, O_y, O_z les axes d'un système de coordonnées rectangulaires fixe dans l'espace, O_{x_1}, O_{y_1}, O_{z_1} ceux d'un système de coordonnées rectangulaires lié au système invariable. Les cosinus des angles que forment entre eux les axes de ces deux systèmes de coordonnées rectangulaires se trouvent réunis dans le tableau (A):

	x_1	y_1	z_1
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

Ces valeurs se rapportent à la *première* position du système invariable. Pour la seconde position nous écrirons $a + \Delta a$, $b + \Delta b$ . . . . , $c'' + \Delta c''$ au lieu de a, b . . c''.

Nous supposons qu'on peut faire coïncider les directions positives des x_1, y_1, z_1 avec celles des x, y, z; — on sait qu'alors le déterminant formé avec les neuf quantités a, b . . c'' du tableau (A) est égal à $+1$.

Je rappelle quelques relations entre ces diverses quantités:

$$a = b'c'' - b''c'$$
$$1 = a^2 + a'^2 + a''^2$$
$$0 = ab + a'b' + a''b''.$$

Pour abréger, je ferai usage d'un signe sommatoire Σ qui aura rapport à trois termes, que l'on déduit de celui qui est écrit en mettant l'accent simple et double; — p. e., les deux dernières relations sont $1 = \Sigma a^2$, $0 = \Sigma ab$. Un chiffre placé à la suite d'une formule indiquera le nombre total de formules analogues qu'on peut en déduire par un changement, soit des lettres a, b, c, soit des accents.

Il est clair qu'on a entre les quantités $a + \Delta a, \ldots c'' + \Delta c''$ les mêmes relations qu'entre a, b . . c''. En combinant ces diverses relations on peut en déduire un grand nombre d'autres; — je réunis ici quelques relations simples dont nous aurons surtout besoin:

(1) . . . . . . $a = b'c'' - b''c'$ 9

(2) . . . . . . $2\Sigma a \Delta a + \Sigma \Delta a^2 = 0$ 3

(3) . . . . . . $\Sigma a \Delta b + \Sigma b \Delta a + \Sigma \Delta a \Delta b = 0$ 3

Existence et détermination de l'axe de rotation.

2. Cela posé, les relations

$$(4) \dots\dots\dots \begin{cases} x = a x_1 + b y_1 + c z_1, \\ y = a' x_1 + b' y_1 + c' z_1 \\ z = a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1 \end{cases}$$

combinées avec les équations analogues pour la seconde position du système, donnent:

$$(5) \dots\dots \begin{cases} \Delta x = x_1 \Delta a + y_1 \Delta b + z_1 \Delta c, \\ \Delta y = x_1 \Delta a' + y_1 \Delta b' + z_1 \Delta c' \\ \Delta z = x_1 \Delta a'' + y_1 \Delta b'' + z_1 \Delta c'' \end{cases}$$

en désignant par $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ les coordonnées du point considéré après le déplacement. Voyons maintenant s'il y a des points qui n'ont pas changé de position; on devra avoir:

$$(6). \dots\dots \begin{cases} 0 = x_1 \Delta a + y_1 \Delta b + z_1 \Delta c \\ 0 = x_1 \Delta a' + y_1 \Delta b' + z_1 \Delta c' \\ 0 = x_1 \Delta a'' + y_1 \Delta b'' + z_1 \Delta c''. \end{cases}$$

Pour qu'il soit possible de satisfaire à ces relations par des valeurs de x_1, y_1, z_1 qui ne sont pas toutes égales à zéro, il faut et il suffit que le déterminant:

$$(7) \dots\dots\dots D = \begin{vmatrix} \Delta a & \Delta b & \Delta c \\ \Delta a' & \Delta b' & \Delta c' \\ \Delta a'' & \Delta b'' & \Delta c'' \end{vmatrix}$$

soit égal à zéro. Si cette condition est remplie, les trois plans représentés par les équations (6) passent par une même ligne, l'axe de rotation, dont la position est parfaitement déterminée, du moins autant que les neuf mineurs du second degré de D ne sont pas tous égaux à zéro.

Proposition I.

Le déterminant D est toujours égal à zéro.

Proposition II.

Les neuf mineurs du second degré de D sont tous égaux à zéro, *seulement* dans le cas qu'on a $\Delta a = 0 \quad \Delta b = 0 \ldots \Delta c'' = 0$, — c'est-à-dire quand il n'y a pas de déplacement.

Désignons par D_a, D_b . . . $D_{c''}$ les mineurs de D, en sorte qu'on a

$$(8) \ldots\ldots \begin{cases} D = \Sigma \Delta a\, D_a = \Sigma \Delta b\, D_b = \Sigma \Delta c\, D_c \\ 0 = \Sigma \Delta a\, D_b = \Sigma \Delta b\, D_c = \Sigma \Delta c\, D_a. \end{cases}$$

La valeur de D_a est $\Delta b' \Delta c'' - \Delta b'' \Delta c'$, mais l'équation (1) donne :

$$\Delta a = b' \Delta c'' - b'' \Delta c' + c'' \Delta b' - c' \Delta b'' + \Delta b' \Delta c'' - \Delta b'' \Delta c', \text{ donc :}$$

$$(9) \ldots \begin{cases} D_a = \Delta a - b' \Delta c'' + b'' \Delta c' - c'' \Delta b' + c' \Delta b'' & 3, \text{ de même :} \\ D_{a'} = \Delta a' - b'' \Delta c + b \Delta c'' - c \Delta b'' + c'' \Delta b & 3, \\ D_{a''} = \Delta a'' - b \Delta c' + b' \Delta c - c' \Delta b + c \Delta b' & 3. \end{cases}$$

On en déduit, en multipliant par Δa, $\Delta a'$, $\Delta a''$ et faisant l'addition :

$$(10) \ldots\ldots \quad D = \Sigma \Delta a^2 - \Sigma b\, D_b - \Sigma c\, D_c \qquad 3.$$

Mais en multipliant les équations (9) par a, a', a'' on trouvera par l'addition, en vertu des relations (1) :

$$\Sigma a\, D_a = \Sigma a \Delta a - \Sigma b \Delta b - \Sigma c \Delta c,$$

ou bien, à cause de (2) :

$$(11) \,. \begin{cases} \Sigma a\, D_a = -\tfrac{1}{2} \Sigma \Delta a^2 + \tfrac{1}{2} \Sigma \Delta b^2 + \tfrac{1}{2} \Sigma \Delta c^2; \text{ de même :} \\ \Sigma b\, D_b = +\tfrac{1}{2} \Sigma \Delta a^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma \Delta b^2 + \tfrac{1}{2} \Sigma \Delta c^2 \\ \Sigma c\, D_c = +\tfrac{1}{2} \Sigma \Delta a^2 + \tfrac{1}{2} \Sigma \Delta b^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma \Delta c^2. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs de $\Sigma b\, D_b$, $\Sigma c\, D_c$ dans l'équation

(10) on obtient :

$$D = 0 \qquad c. q. f. d.$$

Les équations (11), qui donnent

$$(12) \quad \Sigma\, a\, D_a + \Sigma\, b\, D_b + \Sigma\, c\, D_c = \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, \Delta\, a^2 + \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, \Delta\, b^2 + \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, \Delta c^2,$$

font bien voir qu'en supposant $D_a = D_b = \ldots = D_{c''} = 0$ on doit avoir : $\Sigma\, \Delta\, a^2 = 0$, $\Sigma\, \Delta\, b^2 = 0$, $\Sigma\, \Delta\, c^2 = 0$, donc $\Delta a = \Delta b = \ldots = \Delta\, c'' = 0$, ce qui est notre proposition II.

D'après la démonstration qui précède, il est bien évident que la proposition I est une conséquence nécessaire des relations auxquelles les quantités

$$\begin{array}{lcl} a\ ,\ b\ ,\ c & & a + \Delta\, a\ ,\ b + \nabla\, b\ ,\ c + \Delta\, c \\ a'\ ,\ b'\ ,\ c' & \text{et} & a' + \Delta\, a',\ b' + \Delta\, b',\ c' + \Delta\, c' \\ a'',\ b'',\ c'' & & a'' + \Delta\, a'',\ b'' + \Delta\, b'',\ e'' + \Delta\, c'' \end{array}$$

sont soumises, en sorte que cette proposition reste vraie quelles que soient ces quantités, réelles ou non. La proposition II, au contraire, est démontrée seulement en supposant réelles les quantités $\Delta\, a, \Delta\, b \ldots, \Delta\, c''$. Nous reviendrons plus tard sur cette proposition II, pour faire voir qu'elle aussi est une conséquence des relations entre les $a \ldots c''$, $\Delta\, a \ldots \Delta\, c''$ et ne dépend nullement de la réalité de ces dernières quantités.

D'après ce qui précède, l'axe de rotation est parfaitement déterminé par :

$$(13) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} x_1 : y_1 : z_1 &= D_a : D_b : D_c \\ &= D_{a'} : D_{b'} : D_{c'} \\ &= D_{a''} : D_{b''} : D_{c''} \end{aligned} \right.$$

et cette détermination devient illusoire seulement quand il n'y a pas de déplacement. Ajoutons encore les relations suivantes, qui nous seront utiles plus tard et que l'on obtient sans difficulté en

partant des équations (9) et faisant attention aux relations (3):

(14) . . . . . . $\Sigma\, b\, D_a = \Sigma\, a\, D_b = -\,\Sigma\, \Delta a\, \Delta b$ 3.

On obtient encore une expression remarquable pour la somme $\Sigma D_a^2 + \Sigma D_b^2 + \Sigma D_c^2$. En effet, on a d'après (11) et (14):

$$\begin{aligned} \Sigma\, a\, D_a &= -A + B + C \\ \Sigma\, b\, D_a &= -\Sigma\, \Delta a\, \Delta b \\ \Sigma\, c\, D_a &= -\Sigma\, \Delta a\, \Delta c, \end{aligned}$$

où j'ai posé, pour abréger, $\frac{1}{2}\Sigma\,\Delta a^2 = A$, $\frac{1}{2}\Sigma\,\Delta b^2 = B$, $\frac{1}{2}\Sigma\Delta c^2 = C$. La somme des carrés de ces trois équations donne:

$$\Sigma D_a^2 = (-A + B + C)^2 + (\Sigma\,\Delta a\,\Delta b)^2 + (\Sigma\,\Delta a\,\Delta c)^2$$

Or on a, d'après une transformation bien connue:

$$\begin{aligned} 4AB &= \Sigma\,\Delta a^2 \times \Sigma\,\Delta b^2 = (\Sigma\,\Delta a\,\Delta b)^2 + D_c^2 + D_{c'}^2 + D_{c''}^2 \\ 4AC &= \Sigma\,\Delta a^2 \times \Sigma\,\Delta c^2 = (\Sigma\,\Delta a\,\Delta c)^2 + D_b^2 + D_{b'}^2 + D_{b''}^2, \end{aligned}$$

donc:

$$\Sigma D_a^2 + \Sigma D_b^2 + \Sigma D_c^2 = (A + B + C)^2,$$

c'est-à-dire

(15) $\Sigma D_a^2 + \Sigma D_b^2 + \Sigma D_c^2 = \frac{1}{4}\left[\Sigma\,\Delta a^2 + \Sigma\,\Delta b^2 + \Sigma\,\Delta c^2\right]^2.$

Autre formule pour déterminer l'axe de rotation.

3. D'après ce qui précède, on a:

$$\begin{aligned} D = \Delta a\, D_a + \Delta b\, D_b + \Delta c\, D_c &= 0, \\ \Delta a'\, D_a + \Delta b'\, D_b + \Delta c'\, D_c &= 0, \\ \Delta a''\, D_a + \Delta b''\, D_b + \Delta c''\, D_c &= 0. \end{aligned}$$

En multipliant ces équations par $c+\frac{1}{2}\Delta c$, $c'+\frac{1}{2}\Delta c'$, $c''+\frac{1}{2}\Delta c''$ la quantité D_c se trouvera éliminée après l'addition, en vertu des relations (2). En posant donc:

$$(16) \ldots \begin{cases} p = \Sigma (c + \frac{1}{2}\Delta c)\Delta b = -\Sigma (b + \frac{1}{2}\Delta b)\Delta c \\ q = \Sigma (a + \frac{1}{2}\Delta a)\Delta c = -\Sigma (c + \frac{1}{2}\Delta c)\Delta a \\ r = \Sigma (b + \frac{1}{2}\Delta b)\Delta a = -\Sigma (a + \frac{1}{2}\Delta a)\Delta b, \end{cases}$$

on obtient $-q\,D_a + p\,D_b = 0$ ou $D_a : D_b = p : q$. En réunissant toutes les relations de même nature, on trouve:

$$(17) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} p : q : r = D_a : D_b : D_c \\ \qquad\quad\; = D_{a'} : D_{b'} : D_{c'} \\ \qquad\quad\; = D_{a''} : D_{b''} : D_{c''}. \end{cases}$$

Par conséquent la formule (13), qui détermine l'axe de rotation, peut se mettre sous la forme:

$$(18) \ldots\ldots\ldots\ldots \; x_1 : y_1 : z_1 = p : q : r.$$

C'est la formule donnée par Duhamel. Elle devient illusoire quand on a à la fois $p = 0$, $q = 0$ et $r = 0$. Nous verrons que cela a lieu non seulement quand il n'y a pas de déplacement, mais encore dans d'autres cas. Alors cette formule (18) devient insuffisante et il faut recourir aux formules (13). Nous allons déduire maintenant un système de formules qui nous permettra de dire avec précision dans quels cas on a: $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$.

---

4. Nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= (a + \tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta a + (a' + \tfrac{1}{2}\Delta a')\Delta a' + (a'' + \tfrac{1}{2}\Delta a'')\Delta a'' \\ +r &= (b + \tfrac{1}{2}\Delta b)\Delta a + (b' + \tfrac{1}{2}\Delta b')\Delta a' + (b'' + \tfrac{1}{2}\Delta b'')\Delta a'' \\ -q &= (c + \tfrac{1}{2}\Delta c)\Delta a + (c' + \tfrac{1}{2}\Delta c')\Delta a' + (c'' + \tfrac{1}{2}\Delta a'')\Delta a''. \end{aligned}$$

En éliminant $\Delta a'$, $\Delta a''$ il vient:

$$(19) \ldots\ldots\ldots \; R\Delta a = r\,R_b - q\,R_c \qquad 9,$$

en désignant par R le déterminant :

$$(20)\quad R = \begin{vmatrix} a+\frac{1}{2}\Delta a & b+\frac{1}{2}\Delta b & c+\frac{1}{2}\Delta c \\ a'+\frac{1}{2}\Delta a' & b'+\frac{1}{2}\Delta b' & c'+\frac{1}{2}\Delta c' \\ a''+\frac{1}{2}\Delta a'' & b''+\frac{1}{2}\Delta b'' & c''+\frac{1}{2}\Delta c'' \end{vmatrix}$$

et par $R_a\ R_b \ldots R_{c''}$ les mineurs du second degré de R.

La valeur de R_a est $(b'+\frac{1}{2}\Delta b')(c''+\frac{1}{2}\Delta c'') - (b''+\frac{1}{2}\Delta b'')(c'+\frac{1}{2}\Delta c')$. En opérant les multiplications on peut simplifier le résultat à l'aide de la relation (1) et de la valeur de Δa qu'on en tire ; — on trouvera ainsi :

$$R_a = a + \tfrac{1}{2}\Delta a - \tfrac{1}{4}(\Delta b'\,\Delta c'' - \Delta b''\,\Delta c'),$$

c. a. d. :

$$(21) \ldots\ldots\ldots \quad R_a = a + \tfrac{1}{2}\Delta a - \tfrac{1}{4} D_a \qquad 9.$$

On en tire aussitôt:

$$(22) \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma R_a \Delta a = 0 \qquad 3,$$

$$(23) \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma R_a \Delta b = -r \qquad 3,$$

$$(24) \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma R_a \Delta c = +q \qquad 3.$$

L'équation (19) donne ensuite :

$$R\,\Sigma\,\Delta a^2 = r\,\Sigma R_b\,\Delta a - q\,\Sigma R_c\,\Delta a,$$
$$R\,\Sigma\,\Delta a\,\Delta b = r\,\Sigma R_b\,\Delta b - q\,\Sigma R_c\,\Delta b,$$

c'est-à-dire, en vertu des relations (22), (23), (24):

$$(25) \ldots \begin{cases} R\,\Sigma\,\Delta a^2 = q^2 + r^2, & R\,\Sigma\,\Delta a\,\Delta b = -pq, \\ R\,\Sigma\,\Delta b^2 = r^2 + p^2, & R\,\Sigma\,\Delta b\,\Delta c = -qr, \\ R\,\Sigma\,\Delta c^2 = p^2 + q^2, & R\,\Sigma\,\Delta c\,\Delta a = -rp, \end{cases}$$

ou bien, en faisant attention aux formules (11) et (14):

$$(26) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} p^2 = R\,\Sigma\, a\, D_a \\ q^2 = R\,\Sigma\, b\, D_b \\ r^2 = R\,\Sigma\, c\, D_c \end{cases}$$

$$(27) \ldots\ldots \begin{cases} q\,r = R\,\Sigma\, b\, D_c = R\,\Sigma\, c\, D_b \\ r\,p = R\,\Sigma\, c\, D_a = R\,\Sigma\, a\, D_c \\ p\,q = R\,\Sigma\, a\, D_b = R\,\Sigma\, b\, D_a. \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant exprimer aussi les $D_a \ldots D_{c''}$ à l'aide de p, q, r; — en effet, les formules:

$$R\,(a\,D_a + a'\,D_{a'} + a''\,D_{a''}) = p^2$$
$$R\,(b\,D_a + b'\,D_{a'} + b''\,D_{a''}) = p\,q$$
$$R\,(c\,D_a + c'\,D_a + c''\,D_{a''}) = p\,r$$

donnent aussitôt la première des neuf équations:

$$(28) \begin{cases} R\,D_a = p\,(a\,p + b\,q + c\,r), R\,D_b = q\,(a\,p + b\,q + cr), \\ R\,D_{a'} = p\,(a'\,p + b'q + c'r), R\,D_{b'} = q\,(a'p + b'q + c'r), \\ R\,D_{a''} = p\,(a''p + b''q + c''r), R\,D_{c''} = q\,(a''p + b''q + c''r), \\ R\,D_c = r\,(a\,p + bq + c\,r), \\ R\,D_{c'} = r\,(a'p + b'q + c'r), \\ R\,D_{c''} = r\,(a''p + b''q + c''r). \end{cases}$$

D'après la définition des $R_a \ldots R_{c''}$, on a $R = \Sigma\,(a + \frac{1}{2}\Delta a)\,R_a$ ou bien, à cause de (22), $R = \Sigma\, a\, R_a$. En substituant la valeur (21) de R_a il vient:

$$R = 1 + \tfrac{1}{2}\,\Sigma\, a\,\Delta\, a - \tfrac{1}{4}\,\Sigma\, a\, D_a = 1 - \tfrac{1}{4}\,\Sigma\,\Delta\, a^2 - \tfrac{1}{4}\,\Sigma\, a\, D_a,$$

ou bien, parce que les relations (11) donnent $\Sigma\,\Delta\, a^2 = \Sigma b\, D_b + \Sigma c D_c$:

$$(29) \ldots\ldots R = 1 - \tfrac{1}{4}\,\Sigma\, a\, D_a - \tfrac{1}{4}\,\Sigma\, b\, D_b - \tfrac{1}{4}\,\Sigma\, c\, D_c.$$

On tire des équations (26):

$$p^2 + q^2 + r^2 = R\,(\Sigma\, a\, D_a + \Sigma\, b\, D_b + \Sigma\, c\, D_c);$$

le facteur de R dans le second membre est égal à $4(1-R)$ d'après (29), donc:

$$(30) \quad \ldots\ldots\ldots \quad p^2 + q^2 + r^2 = 4R(1-R).$$

La relation (21) donne encore: $\Sigma\, b\, R_a = \frac{1}{2} \Sigma\, b \Delta a - \frac{1}{4} \Sigma\, b\, D_a$, ou bien, à cause de (14): $\Sigma\, b\, R_a = \frac{1}{4} \Sigma\, b \Delta a + \frac{1}{4} \Sigma \Delta a \Delta b$, c'est-à-dire: $\Sigma\, b\, R_a = \frac{1}{2} r$. On obtient de la même manière:

$$(31) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 2\, \Sigma\, c\, R_b = -2\, \Sigma\, b\, R_c \\ q = 2\, \Sigma\, a\, R_c = -2\, \Sigma\, c\, R_a \\ r = 2\, \Sigma\, b\, R_a = -2\, \Sigma\, a\, R_b. \end{array} \right.$$

Les équations:

$$\begin{array}{l} a\, R_a + a'\, R_{a'} + a''\, R_{a''} = R \\ b\, R_a + b'\, R_{a'} + b''\, R_{a'} = \frac{1}{2} r \\ c\, R_a + c'\, R_{a'} + c''\, R_{a''} = -\frac{1}{2} q \end{array}$$

donnent maintenant la première des neuf relations:

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} R_a = aR + \frac{1}{2}(br - cq),\ R_b = b\,R + \frac{1}{2}(c\,p - a\,r), \\ R_{a'} = a'R + \frac{1}{2}(b'r - c'q),\ R_{b'} = b'R + \frac{1}{2}(c'p - a'r), \\ R_{a''} = a''R + \frac{1}{2}(b''r - c''q),\ R_{b''} = b''R + \frac{1}{2}(c''p - a''r), \\ \qquad R_c = cR + \frac{1}{2}(a\,q - b\,p)\,, \\ \qquad R_{c'} = c'R + \frac{1}{2}(a'p - b'p)\,, \\ \qquad R_{c''} = c''R + \frac{1}{2}(a''q - b''p). \end{array} \right.$$

La somme des carrés des mêmes équations donne:

$$\Sigma\, R_a^2 = R^2 + \tfrac{1}{4} q^2 + \tfrac{1}{4} r^2 \qquad 3\text{, donc:}$$

$$\Sigma\, R_a^2 + \Sigma\, R_b^2 + \Sigma\, R_c^2 = 3\, R^2 + \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2)\,,$$

c'est-à-dire, en vertu de (30):

$$(33) \quad \ldots\ldots \quad \Sigma\, R_a^2 + \Sigma\, R_b^2 + \Sigma\, R_c^2 = R^2 + 2\,R$$

---

5. **Revenons maintenant à la proposition II, qui a été démontrée seulement en supposant Δa, Δb .. $\Delta c''$ réels. Faisons donc : $D_a = D_b = \ldots = D_{c''} = 0$ et voyons ce qui s'en suit. Les équations (29) et (26) donnent: $R = 1$, $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$. Ensuite les équations (19) :**

$$\Delta a = 0, \ \Delta b = 0 \ldots \quad , \ \Delta c'' = 0.$$

Comme nous l'avons déjà annoncé, cette proposition II ne dépend donc en aucune façon de la réalité des quantités $\Delta a \ldots \Delta c''$.

---

6. **Voyons maintenant dans quels cas la formule (18) cesse de déterminer l'axe de rotation, c'est-à-dire dans quels cas on a $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$. La formule (30) fait voir que R est égal à l'unité ou à zéro.**

Premier cas: **$R = 1$. $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$.**

Les relations (28) font voir que tous les D_a .. $D_{c''}$ deviennent égaux à zéro, d'après la proposition II, il s'ensuit que tous les $\Delta a \ldots \Delta c''$ sont aussi égaux à zéro : il n'y a pas de déplacement. L'indétermination de l'axe de rotation dans ce cas est aussi annoncée par l'équation (13), elle est dans la nature des choses. Les quatre équations $R = 1$, $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ vérifiant la relation (30) équivalent à trois conditions, qui suffisent à déterminer le déplacement, qui est nul, comme on l'a vu. En effet, la condition $R = 1$ donne bien $p^2 + q^2 + r^2 = 0$, mais *algébriquement* cela n'entraîne nullement $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, bien que cela ait lieu en admettant seulement des valeurs réelles. P. e., supposons que le tableau (A) soit:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et après le déplacement} \quad \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{i}{2} & i \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -i & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{donc}$$

$$\Delta a = \tfrac{1}{2}, \quad \Delta b = \tfrac{i}{2}, \quad \Delta c = i,$$
$$\Delta a' = \tfrac{i}{2}, \quad \Delta b' = -\tfrac{1}{2}, \quad \Delta c' = -1,$$
$$\Delta a'' = -i, \quad \Delta b'' = 1, \quad \Delta c'' = 0,$$

on trouvera $R = 1$, $p = 1$, $q = i$, $r = 0$.

Il en est tout autrement dans le

Second cas: $R = 0$, $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$.

En effet, les équations (26) montrent que la condition $R = 0$ entraîne déjà ces trois autres : $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$. Ce second cas est donc caractérisé par la condition unique $R = 0$, qui ne peut pas déterminer le déplacement, qu'on peut au contraire assujettir encore à deux autres conditions.

Pour reconnaître la signification de cette condition $R = 0$, il faut se reporter aux équations (4) et (5), qui donnent:

$$x + \tfrac{1}{2}\Delta x = (a + \tfrac{1}{2}\Delta a)\, x_1 + (b + \tfrac{1}{2}\Delta b)\, y_1 + (c + \tfrac{1}{2}\Delta c)\, z_1,$$
$$y + \tfrac{1}{2}\Delta y = (a' + \tfrac{1}{2}\Delta a')\, y_1 + (b' + \tfrac{1}{2}\Delta b')\, y_1 + (c' + \tfrac{1}{2}\Delta c')\, z_1,$$
$$z + \tfrac{1}{2}\Delta z = (a'' + \tfrac{1}{2}\Delta a'')\, z^1 + (b'' + \tfrac{1}{2}\Delta b'')\, y^1 + (c'' + \tfrac{1}{2}\Delta c'')\, z_1.$$

On voit par là que $R = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit possible de satisfaire aux conditions:

$$x + \tfrac{1}{2}\Delta x = 0,$$
$$y + \tfrac{1}{2}\Delta y = 0,$$
$$z + \tfrac{1}{2}\Delta z = 0,$$

par des valeurs de x_1, y_1, z_1 qui ne sont pas toutes nulles. Pour tous les points d'une certaine droite passant par l'origine on a alors $x + \Delta x = -x$, $y + \Delta y = -y$, $z + \Delta z = -z$, c'est-à-dire, après le déplacement cette droite se retrouve dans sa première position, avec superposition des deux moitiés différentes. Or une considération géométrique bien simple montre que le déplacement consiste alors dans une rotation de 180° autour d'un certain axe, et que toutes les droites passant par l'origine

et situées dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation jouissent de la propriété énoncée. Ainsi, lorsque $R=0$, les trois plans:

$$
\begin{aligned}
(a+\tfrac{1}{2}\Delta a)x_1+(b+\tfrac{1}{2}\Delta b)y_1+(c+\tfrac{1}{2}\Delta c)z_1&=0,\\
(a'+\tfrac{1}{2}\Delta a')x_1+(b'+\tfrac{1}{2}\Delta b')y_1+(c'+\tfrac{1}{2}\Delta c')z_1&=0,\\
(a''+\tfrac{1}{2}\Delta a'')x_1+(b''+\tfrac{1}{2}\Delta b'')y_1+(c''+\tfrac{1}{2}\Delta c'')z_1&=0,
\end{aligned}
$$

passent non seulement par une même droite, mais ces trois plans coïncident avec un plan mené par l'origine perpendiculairement à l'axe de rotation. Autrement, et dans le langage de l'algèbre, nous pouvons énoncer cette:

Proposition III. Lorsque le déterminant R est égal à zéro, ces neuf mineurs R_a, R_b ... $R_{c''}$ s'évanouissent en même temps.

En effet, la supposition $R=0$ donne $p=0$, $q=0$, $r=0$, et dès lors les équations (32) mettent en évidence notre proposition. Cette démonstration, on le voit, ne dépend nullement de la réalité des quantités a, b.. , Δa, Δb..., comme la considération géométrique qui nous a conduit d'abord à cette proposition. Dans le cas actuel, la relation (21) donne encore : $D_a=4\,(a+\frac{1}{2}\Delta a)$ etc., en sorte que l'équation (13) de l'axe de rotation peut s'écrire:

$$
(34)\quad \left\{
\begin{aligned}
x_1:y_1:z_1&=a+\tfrac{1}{2}\Delta a:b+\tfrac{1}{2}\Delta b:c+\tfrac{1}{2}\Delta c\\
&=a'+\tfrac{1}{2}\Delta a':b'+\tfrac{1}{2}\Delta b':c'+\tfrac{1}{2}\Delta c'\\
&=a''+\tfrac{1}{2}\Delta a'':b''+\tfrac{1}{2}\Delta b'':c''+\tfrac{1}{2}\Delta c'',
\end{aligned}
\right.
$$

ce qui est bien conforme à ce que nous venons de dire.

Il n'y a pas lieu de s'occuper du sens de la rotation, parce qu'une rotation de 180° dans l'un ou l'autre sens produit le même effet.

---

7. Après avoir traité complètement le cas $p=0$, $q=0$, $r=0$ nous en ferons abstraction dans la suite, et par conséquent l'axe de rotation sera déterminé par l'équation (18). Il nous reste à déterminer l'amplitude et le sens de la rotation qui permet de passer de la première position du système invariable à la seconde position.

Soit Θ l'amplitude de la rotation; comme une rotation Θ dans un sens produit le même effet qu'une rotation $360°-\Theta$ effectuée dans le sens contraire, nous pouvons supposer la valeur absolue de Θ inférieure à 180°. Prenons un point arbitraire P sur l'axe de rotation et une droite OQ perpendiculaire à OP et liée au système invariable. Pour amener la droite OQ dans sa position finale, il faut la tourner d'un angle $\Theta < 180°$ autour de OP, dans un certain sens. Supposons que par une rotation de 90° *dans le même sens*, la droite OQ vienne dans la position OR. Alors nous conviendrons de considérer l'angle Θ comme positif ou négatif selon que les trois droites OP, OQ, OR ont ou n'ont pas la même disposition que les axes Ox, Oy, Oz. Nous avons pris arbitrairement la direction OP sur l'axe de rotation. On voit qu'en prenant la direction opposée, le signe de Θ change.

Supposons OQ égal à l'unité et OQ' la position finale de OQ, on voit immédiatement que

$$QQ'^2 = 4 \sin \tfrac{1}{2} \Theta^2 ,$$

et cette équation détermine complètement la valeur absolue de Θ.

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de Q par rapport aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1. Les équations (5) donnent:

$$\begin{aligned} QQ'^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = x_1^2 \, \Sigma \Delta a^2 &+ 2 y_2 z_1 \, \Sigma \Delta b \Delta c \\ + y_1^2 \, \Sigma \Delta b^2 &+ 2 z_1 x_1 \, \Sigma \Delta c \Delta a \\ + z_1^2 \, \Sigma \Delta c^2 &+ 2 x_1 y_1 \, \Sigma \Delta a \Delta b. \end{aligned}$$

En multipliant par R nous trouvons, en faisant attention aux relations (25):

$$\begin{aligned} R(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = (q^2 + r^2) x_1^2 &- 2 q r y_1 z_1 \\ + (r^2 + p^2) y_1^2 &- 2 r p z_1 x_1 \\ + (p^2 + q^2) z_1^2 &- 2 pq x_1 y_1 = \\ (p^2 + q^2 + r^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (p x_1 &+ q y_1 + r z_1)^2. \end{aligned}$$

Mais on a $p x_1 + q y_1 + r z_1 = 0$, à cause de la perpendi-

cularité de OP et OQ, et $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$; donc:

$$4\,R \sin \tfrac{1}{2}\,\Theta^2 = p^2 + q^2 + r^2 = 4\,R\,(1-R).$$

Nous arrivons donc à l'expression suivante, qui détermine la valeur absolue de Θ:

(35) . . . . $\sin \frac{1}{2}\,\Theta^2 = 1 - R$

Il faut encore déterminer le signe de Θ. Pour cela, soit $OP=1$, et soient

$$\begin{array}{l} X_1\,,\; Y_1\,,\; Z_1 \\ X_2\,,\; Y_2\,,\; Z_2 \\ X_3\,,\; Y_3\,,\; Z_3 \end{array}$$

les coordonnées de P, Q, Q' par rapport aux axes Ox_1 Oy_1 Oz_1 (dans leur position initiale). Le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

est alors égal en valeur absolue au sextuple de la pyramide $O\,P\,Q\,Q'$, c'est-à-dire égal à $\pm \sin \Theta$, et, d'après la manière dont nous déterminons le signe de Θ, le signe de ces deux expressions est encore le même, donc:

$$\sin \Theta = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3-X_2 & Y_3-Y_2 & Z_3-Z_2 \end{vmatrix}$$

$$\sin \Theta = (X_3-X_2)\,(Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) + (Y_3-Y_2)\,(Z_1 X_2 - Z_2 X_1) + (Z_3-Z_2)\,(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)$$

Or, en posant $S = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$, on aura $X_1 = \frac{p}{S}$, $Y_1 = \frac{q}{S}$, $Z_1 = \frac{r}{S}$.

On peut prendre arbitrairement S positif ou négatif, il faut seulement conserver dans la suite la valeur adoptée.

Ensuite $X_3 - X_2$, $Y_3 - Y_2$, $Z_3 - Z_2$ sont évidemment les projections sur les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 de la ligne QQ'. Or on connaît, par les formules (5), les projections de QQ' sur les axes Ox, Oy, Oz; on en conclut:

$$\begin{aligned} X_3 - X_2 &= X_2 \Sigma a \Delta a + Y_2 \Sigma a \Delta b + Z_2 \Sigma a \Delta c \\ Y_3 - Y_2 &= X_2 \Sigma b \Delta b + Y_2 \Sigma b \Delta b + Z_2 \Sigma b \Delta c \\ Z_3 - Z_2 &= X_2 \Sigma c \Delta a + Y_2 \Sigma c \Delta b + Z_2 \Sigma c \Delta c. \end{aligned}$$

Or on trouve facilement, à l'aide des équations (2), (16), (25):

$$(36) \ldots\ldots \begin{cases} R \Sigma a \Delta a = -\frac{1}{2}(q^2 + r^2) \\ R \Sigma b \Delta b = -\frac{1}{2}(r^2 + p^2) \\ R \Sigma c \Delta c = -\frac{1}{2}(p^2 + q^2) \end{cases}$$

$$(37) \begin{cases} R \Sigma a \Delta b = -Rr + \frac{1}{2}pq, & R \Sigma b \Delta a = +Rr + \frac{1}{2}pq \\ R \Sigma b \Delta c = -Rp + \frac{1}{2}qr, & R \Sigma c \Delta b = +Rp + \frac{1}{2}qr \\ R \Sigma c \Delta a = -Rq + \frac{1}{2}rp, & R \Sigma a \Delta c = +Rq + \frac{1}{2}rp. \end{cases}$$

En introduisant ces valeurs et celles-ci: $X_1 = \frac{p}{S}$, $Y_1 = \frac{q}{S}$, $Z_1 = \frac{r}{S}$, il vient:

$$\begin{aligned} RS \sin\theta = & \left[-\tfrac{1}{2}(q^2 + r^2)X_2 + (-Rr + \tfrac{1}{2}pq)Y_2 + (Rq + \tfrac{1}{2}rp)Z_2 \right] \\ & \qquad (q Z_2 - r Y_2) \\ + & \left[(Rr + \tfrac{1}{2}pq) X_2 - \tfrac{1}{2}(r^2 + p^2) Y_2 + (-Rp + \tfrac{1}{2}qr) Z_2 \right] \\ & \qquad (r X_2 - p Z_2) \\ + & \left[(-Rq + \tfrac{1}{2}rp) X_2 + (Rp + \tfrac{1}{2}qr) Y_2 - \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) Z_2 \right] \\ & \qquad (p Y_2 - q X_2) \end{aligned}$$

En réduisant, le second membre devient divisible par R et l'on obtient:

$$\begin{aligned} S \sin \Theta = & (q^2 + r^2) X_2^2 - 2 q r Y_2 Z_2 \\ & + (r^2 + p^2) Y_2^2 - 2 r p Z_2 X_2 \\ & + (p^2 + q^2) Z_2^2 - 2 p q X_2 Y_2 \end{aligned}$$

et comme tout à l'heure $S \sin \Theta = p^2 + q^2 + r^2 = S^2$; donc définitivement:

(38) . . . . $\sin \Theta = S.$

Les formules (35) et (38), c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \sin \Theta &= S \\ \cos \Theta &= 2 R - 1, \end{aligned}$$

donnent sans aucune ambiguïté l'angle de rotation Θ.

---

8. La position du système invariable dépend de trois paramètres. Par conséquent, on peut se proposer de déterminer la seconde position en connaissant la première position et les trois quantités p, q, r. Nous avons à exprimer $\Delta a \ldots \Delta c''$ à l'aide de p, p, r et de a, b, $c \ldots c''$. Les formules que nous avons développées donnent facilement la solution de ce problème. Remarquons d'abord que la quantité R se détermine à l'aide de la relation $p^2 + q^2 + r^2 = 4 R (1 - R)$. On trouve deux valeurs de R qui se rapportent à deux rotations autour d'un même axe, mais dont les amplitudes sont supplémentaires. Les formules (19) et (32) donnent ensuite:

(39) $R \Delta a = R (b r - cq) + \frac{1}{2} p (ap + bq + cr) - \frac{1}{2} a (p^2 + q^2 + r^2).$ 9

Voici une autre expression des $\Delta a \ldots$, qu'on obtient à l'aide de (21) et (32):

$$(40) \ldots . \Delta a = br - cq + \tfrac{1}{2} D_a - 2a(1 - R) \qquad 9$$

Désignons par u, v, w les cosinus des angles que la direction OP de l'axe de rotation fait avec les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, et par k, k', k'' les cosinus des angles que la même direction fait avec les axes Ox, Oy, Oz; — on aura, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} p &= u \sin \Theta, & ap + bq + cr &= k \sin \Theta, \\ q &= v \sin \Theta, & a'p + b'q + cr &= k' \sin \Theta, \\ r &= w \sin \Theta, & a''p + b''q + c''r &= k'' \sin \Theta. \end{aligned}$$

Les équations (28) prennent la forme simple :

$$\begin{aligned} D_a &= 2(1-\cos\Theta)uk, & D_b &= 2(1-\cos\Theta)vk, & D_c &= 2(1-\cos\Theta)wk, \\ D_{a'} &= 2(1-\cos\Theta)uk', & D_{b'} &= 2(1-\cos\Theta)vk', & D_{c'} &= 2(1-\cos\Theta)wk', \\ D_{a''} &= 2(1-\cos\Theta)uk'', & D_{b''} &= 2(1-\cos\Theta)vk'', & D_{c''} &= 2(1-\cos\Theta)wk'', \end{aligned}$$

et les formules (40):

$$\Delta a = \sin\Theta (bw - cv) + (1 - \cos\Theta)(uk - a) \qquad 9$$

---

9. Les équations (13) et (18) sont celles de l'axe de rotation par rapport aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1. On obtient des équations aussi simples par rapport aux axes Ox, Oy, Oz. En effet, on a : $x_1 = ax + a'y + a''z$, donc $0 = x\Delta a + y \Delta a' + z \Delta a'' + a \Delta x + a' \Delta y + a'' \Delta z + \Delta a \Delta x + \Delta a' \Delta y + \Delta a'' \Delta z$, et par conséquent l'axe de rotation est déterminé par:

$$\begin{aligned} 0 &= x\Delta a + y\Delta a' + z\Delta a'' \\ 0 &= x\Delta b + y\Delta b' + z\Delta b'' \\ 0 &= x\Delta c + y\Delta c' + z\Delta c'', \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$(41) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} x : y : z &= D_a : D_{a'} : D_{a''} \\ &= D_b : D_{b'} : D_{b''} \\ &= D_c : D_{c'} : D_{c''}. \end{aligned} \right.$$

En poursuivant cette voie, il faudrait introduire, au lieu de p, q, r, trois autres quantités s, s', s'' par les équations:

$$(42)\,.\quad \begin{cases} s = S\,(a' + \tfrac{1}{2}\,\Delta\, a')\,\Delta\, a'' = -\,S\,(a'' + \tfrac{1}{2}\,\Delta\, a'')\,\Delta\, a', \\ s' = S\,(a'' + \tfrac{1}{2}\,\Delta\, a'')\,\Delta\, a = -\,S\,(a + \tfrac{1}{2}\,\Delta\, a)\,\Delta\, a'' \\ s'' = S\,(a + \tfrac{1}{2}\,\Delta\, a)\,\Delta\, a' = -\,S\,(a' + \tfrac{1}{2}\,\Delta\, a')\,\Delta\, a. \end{cases}$$

Ici le signe sommatoire S a rapport à trois termes qu'on déduit de celui qui est écrit en changeant a en b et en c.

L'axe de rotation est déterminé alors aussi par:

$$(43)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ x : y : z = s : s' : s''.$$

On obtient du reste un système de relations tout à fait semblable aux formules que nous avons déduites dans le N°. 4; — je crois inutile de m'y arrêter et je me contenterai de donner ces relations:

$$(44)\ \ldots\quad \begin{cases} s = ap + bq + cr\,, & p = a\,s + a's' + a''s'', \\ s' = a'p + b'q + c'r, & q = b\,s + b's' + b''s''; \\ s'' = a''p + b''q + c''r, & r = cs + c's' + c''s''. \end{cases}$$

LEYDE, août 1884.

ERRATA.

(tome XIX, 2e livraison)

Page 156, ligne 2, *au lieu de* 1860, *lisez:* 1680.

Page 163, lignes 2 et 3, *au lieu de* ces dernières augites, beaucoup plus abondantes que les vertes, *lisez:* ces derniers cristaux, beaucoup plus abondants que les verts.

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

SUR LES TRAJECTOIRES
DÉCRITES
SOUS L'INFLUENCE D'UNE FORCE CENTRALE,

PAR

D. J. KORTEWEG.

I. Introduction.

1. Pour se faire, *à priori*, une idée des différentes formes que pourront prendre les trajectoires résultant de l'action d'une force centrale qui est une fonction uniforme de la distance au centre, on n'a qu'à poursuivre, d'abord dans la direction centrifuge, puis dans la direction centripète, une trajectoire idéale, et à noter les divers cas qui peuvent se présenter. On reconnaît alors immédiatement que la *branche centrifuge* peut finir de trois manières. Elle peut, *en premier lieu*, conduire à un apocentre. La droite qui joint le centre à l'apocentre est alors un axe de symétrie de la trajectoire, de sorte que tout examen de la forme ultérieure de cette trajectoire devient superflu. La branche peut, *en second lieu*, s'éloigner du centre jusqu'à l'infini. *En troisième lieu*, la distance au centre peut approcher d'une valeur limite, qui n'est jamais atteinte. La trajectoire fait alors une infinité de circonvolutions, à la manière d'une spirale, en se rapprochant de plus en plus d'un cercle asymptotique situé en dehors d'elle, sans jamais atteindre ce cercle. Pour désigner cette dernière forme, nous dirons que la trajectoire finit en spirale à cercle asymptotique extérieur [1]).

[1]) En posant la question comme je le fais ici, la possibilité de l'existence de cette troisième forme de la trajectoire devient évidente dès l'abord. Pourtant, en parcourant la littérature, je ne l'ai trouvée mentionnée que chez van Geer. *Beschouwingen over de recht- en kroml. bew. van een punt.* (1874) et Kärger, Grunert's *Archiv* 58, p. 255, (1876).

Les *branches centripètes* se comportent également de trois manières différentes. Il y en a, *en premier lieu*, qui conduisent au centre. Ce qu'elles deviennent au-delà de ce point, c'est une question dont nous ne nous occuperons pas. Il y en a, en *second lieu* qui donnent naissance à un péricentre, et, en *troisième lieu*, d'autres qui se terminent en spirale à cercle asymptotique intérieur.

En combinant entre eux ces divers modes de terminaison de la trajectoire en direction centrifuge et en direction centripète, on voit donc qu'il peut se présenter *neuf* formes principales différentes, sans compter les formes circulaires et radiales.

2. Si l'on considère maintenant les trajectoires qui prennent naissance sous l'action des forces centrales les plus connues, savoir, la force proportionnelle à la distance et la force en raison inverse du carré de la distance, ce qui doit frapper tout d'abord, c'est que, des neuf formes principales possibles, il s'en produit seulement une dans le premier cas, et seulement deux dans le second. En outre, dans le second cas, le caractère auquel on peut juger, pour un point de départ donné et pour une vitesse donnée, laquelle des deux formes principales apparaîtra, est remarquable par sa simplicité. La direction de la vitesse, en effet, est indifférente; il s'agit seulement de savoir si la vitesse est assez grande pour animer le point d'une force vive capable de fournir le travail nécessaire au transport du point à l'infini. Ce caractère simple persiste pour beaucoup de lois de force, mais pour d'autres il est en défaut. Quelles sont les conditions dans lesquelles il a cours? Entre quelles limites s'applique cette propriété si remarquable de beaucoup de lois de force, que les trajectoires dirigées d'emblée vers le centre sont les seules qui atteignent ce centre, tandis que toutes les autres conduisent à un péricentre? Quelles sont, en général, les conditions sous lesquelles se produisent les différentes formes principales? Dans ce qui a été écrit sur le mouvement central on trouve, pour beaucoup d'hypothèses particulières concernant la loi de la force, le calcul des trajectoires et l'indication de leurs formes. Surtout depuis l'introduction des fonctions elliptiques, le nombre des cas,

où les équations différentielles auxquelles on parvient sont intégrables, s'est notablement accru. Néanmoins, j'ai cherché en vain dans la littérature une réponse directe et générale aux questions qui viennent d'être posées, et c'est ainsi que j'ai été conduit à entreprendre une étude personnelle, qui m'a fait découvrir quelques propriétés générales du mouvement central, assez intéressantes, me semble-t-il, pour être communiquées.

3. Dès le début de mes recherches, j'ai reconnu qu'il convient de partager le champ dans lequel agit la force centrale et qui, puisque toutes les trajectoires sont planes, peut être considéré comme un plan, en trois espèces de régions. A la *première espèce* appartient toute région où la force centrale est répulsive; à la *seconde espèce*, toute région où elle attire et où, en outre, *le produit de la force et du cube de la distance* au centre *croît avec cette distance*; à la *troisième espèce*, toute région où la force est attractive et où le produit en question *diminue* lorsque la distance *augmente*.

Une région de la *première espèce* sera appelé une région de répulsion, une de la *seconde espèce* une *région de stabilité*, et une de la *troisième espèce* une *région d'instabilité*, ces deux dernières dénominations étant empruntées de l'action différente qu'une légère perturbation produit sur le mouvement dans la trajectoire circulaire, suivant que cette trajectoire circulaire se trouve dans une région de la *seconde* ou de la *troisième* espèce.

Naturellement, on peut encore rencontrer, comme cas très particuliers: une région où la force n'exerce aucune action, et une région, — celle de *la raison inverse du cube*, — où le produit de la force par le cube de la distance reste constant.

Un champ de force arbitrairement donné peut être partagé, par des cercles ayant pour centre le point d'où l'action émane, en régions de ces différentes espèces.

4. Il y a deux grandeurs qui, sur une même trajectoire, possèdent partout la même valeur. L'une est relative à l'énergie. Si nous mesurons *l'énergie potentielle* par le travail qui devient libre lorsque la particule est portée, du point qu'elle occupe, à

une distance fixée une fois pour toutes, l'*énergie actuelle* par la moitié de la force vive, alors la somme de ces deux quantités, l'*énergie totale*, est constante pour chaque trajectoire donnée.

L'autre grandeur constante est le secteur décrit dans l'unité de temps. On donne à cette grandeur, — par analogie avec l'expression : vitesse angulaire, — le nom de *vitesse aréolaire.*

Ces deux constantes et *un* point de la trajectoire déterminent, lorsque la loi de la force est connue, la trajectoire et la vitesse en chacun de ses points. En effet, au moyen de l'*énergie totale* on peut calculer la grandeur de la vitesse au point donné, puis, au moyen de la *vitesse aréolaire*, la direction de cette vitesse; de là on déduira la position du point suivant, et, en continuant de la sorte, on arrivera à construire la trajectoire entière.

Si l'on choisit ensuite un autre point de départ, sans rien changer à l'*énergie totale* ni à la *vitesse aréolaire*, on retrouvera une trajectoire de la même forme et parcourue avec la même vitesse, *pourvu* que le rayon vecteur du point de départ soit égal à celui d'un des points qui appartenaient à la première trajectoire. Prend-on, au contraire, un point de départ dont le rayon vecteur est plus grand que le maximum ou plus petit que le minimum des rayons vecteurs offerts par la première trajectoire, il pourra encore arriver qu'une trajectoire passe par ce point de départ, mais cette trajectoire possédera alors une forme différente. Avec une *énergie totale* et une *vitesse aréolaire* données, plusieurs trajectoires, de forme différente, sont en général possibles, mais deux de ces trajectoires ne peuvent jamais avoir un rayon vecteur de même longueur, de sorte que la connaissance d'un des rayons vecteurs de la trajectoire détermine celle-ci sans la moindre ambiguïté.

Il va sans dire qu'au point de vue purement mathématique toutes ces trajectoires sont connexes et que toutes, si l'intégration des équations du mouvement peut se faire, seront comprises dans la même équation analytique. Mais il est impossible qu'une particule matérielle passe d'une de ces trajectoires à l'autre, de sorte qu'au point de vue mécanique ce sont des trajectoires différentes.

Comme c'est exclusivement à ce dernier point de vue que les trajectoires seront considérées dans la suite de ce travail, je présenterai ici une remarque qui, pour cette raison, pourrait difficilement trouver place ailleurs. Elle concerne une circonstance qui me causa d'abord quelque surprise. Si d'un même point et avec une même vitesse initiale on fait partir des trajectoires dans des directions différentes, une différence infiniment petite de la direction occasionnera souvent, comme on le verra plus loin, une différence finie dans la distance de l'apocentre. Cela aura lieu chaque fois que, pour une certaine direction de la vitesse, il se produit une trajectoire terminée en spirale à cercle asymptotique.

Comment expliquer ce phénomène au point de vue mathématique? De la manière suivante: A une direction déterminée de la vitesse correspondent deux trajectoires, dans lesquelles la vitesse aréolaire et l'énergie totale possèdent la même valeur, et qui sont donc mathématiquement connexes. L'extérieure de ces deux trajectoires enveloppe l'autre, de telle sorte que *son* péricentre est plus éloigné du centre que ne l'est l'apocentre de la trajectoire intérieure. Si l'on fait maintenant varier graduellement, dans un sens déterminé, la direction ou la grandeur de la vitesse au point donné, la distance apocentre de la trajectoire intérieure et la distanee péricentre de la trajectoire extérieure approchent de plus en plus de l'égalité. Au moment où cette égalité est complètement réalisée, les deux trajectoires se terminent en spirales, qui sont asymptotiques à un même cercle, l'une à l'intérieur, l'autre à l'extérieur.

L'instant suivant, les deux trajectoires sont confondues et doivent être considérées, même au point de vue mécanique, comme une trajectoire unique. La particule matérielle, qui parcourt la trajectoire, atteint alors subitement une distance apocentre égale à celle de la trajectoire extérieure.

5. Par chaque point peut être menée *une* trajectoire circulaire; pour faire décrire celle-ci, il faut donner à la particule matérielle une vitesse déterminée, que nous appellerons la *vitesse circulaire* en ce point; la valeur que l'énergie acquiert alors sera dite

l'*énergie du mouvement circulaire* en ce point; de même, on peut parler de la *vitesse aréolaire du mouvement circulaire* en un point donné.

Dans la suite, nous supposerons que la masse de la particule matérielle est égale à l'unité de masse, ce qui naturellement ne constitue pas une limitation. Nous introduirons, en outre, les notations suivantes:

- ϱ_0 distance du centre au point où l'énergie potentielle est supposée égale à *zéro*,
- ϱ distance d'un point quelconque au centre,
- v vitesse en un point quelconque de la trajectoire,
- μ angle aigu entre la tangente et le rayon vecteur,
- F force attractive,
- A énergie totale d'une trajectoire quelconque,
- A_w énergie du mouvement circulaire en un point donné,
- B vitesse aréolaire d'une trajectoire quelconque,
- B_w vitesse aréolaire du mouvement circulaire en un point donné,

A mesure que l'angle μ est plus petit, la trajectoire sera dite plus inclinée.

Entre ces quantités existent, comme on sait, les relations suivantes:

$$w^2 = F\varrho \qquad (1)$$

$$A = \tfrac{1}{2} v^2 + \int_{\varrho_0}^{\varrho} F\, d\varrho \qquad (2)$$

$$A_w = \tfrac{1}{2} w^2 + \int_{\varrho_0}^{\varrho} F\, d\varrho = \tfrac{1}{2} F\varrho + \int_{\varrho_0}^{\varrho} F\, d\varrho \qquad (3)$$

$$B = \tfrac{1}{2} \varrho v \sin \mu \qquad (4)$$

$$B_w = \tfrac{1}{2} \varrho w \qquad (5)$$

Nous noterons encore la condition sous laquelle un *péricentre* ou un *apocentre* apparaît dans la trajectoire. Tous les deux exigent

$$\mu = 90^0\,,$$

mais un *péricentre* demande, en outre:

$$v > w \quad \text{et par conséquent} \quad A > A_w,$$

un *apocentre*, au contraire:

$$v < w \quad \text{et par conséquent} \quad A < A_w.$$

Une *terminaison en spirale à cercle asymptotique* exige naturellement, puisque la trajectoire approche alors de plus en plus, par sa forme, de la trajectoire circulaire:

$$lim\ v = lim\ w \quad A = lim\ A_w.$$

Enfin nous signalerons une proposition dont, par la suite, nous ferons tacitement un usage répété, à savoir: que lorsque d'un même point partent différentes trajectoires, avec la même vitesse, mais dans des directions différentes, on trouve les mêmes vitesses dans tous les points de ces trajectoires dont les rayons vecteurs sont égaux. En effet, l'énergie est la même dans toutes ces trajectoires. A égale distance du centre, il y a en outre, sur toutes les trajectoires, égalité d'énergie potentielle, donc aussi égalité d'énergie actuelle, et par conséquent égalité de vitesse.

II. Théorèmes généraux.

6. Théorème I. *L'énergie du mouvement circulaire, la vitesse aréolaire du mouvement circulaire et la quantité $F.\varrho^3$, en un point donné, croissent et décroissent toujours simultanément quand le point est déplacé dans le champ.*

Démonstration. Les trois grandeurs en question sont exclusivement des fonctions de ϱ. On a:

$$\frac{d.A_w}{d\varrho} = \tfrac{3}{2}F + \tfrac{1}{2}\varrho\frac{dF}{d\varrho} = \frac{1}{2\varrho^2}\cdot\frac{d.F.\varrho^3}{d\varrho} \quad \ldots\ldots (6)$$

d'où il suit que les dérivées de A_w et de $F\varrho^3$, par rapport à ϱ, ont toujours le même signe.

On a en outre:

$$B^2{}_w = \tfrac{1}{4}\,\varrho^2\,w^2 = \tfrac{1}{4}\,F.\,\varrho^3 \;.\;, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (7)$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Corollaires. a. Dans une *région de stabilité* l'*énergie* et la *vitesse aréolaire* du mouvement circulaire *croissent* avec la distance, dans une *région d'instabilité* elles *décroissent* avec elle.

b. Dans la *région de la raison inverse du cube*, l'*énergie* et la *vitesse aréolaire* du mouvement circulaire sont partout les mêmes.

c. A la limite entre une *région de stabilité* et une *région d'instabilité* l'*énergie* et la *vitesse aréolaire* du mouvemeut circulaire acquièrent des valeurs maximum ou minimum: des valeurs maximum lorsque la région d'instabilité se trouve à l'extérieur, des valeurs minimum lorsque c'est la région de stabilité qui a cette situation.

d. L'apocentre et le péricentre d'une même trajectoire ne peuvent jamais être situés dans une même région d'instabilité. En effet, si l'on désigne par ϱ_2 le rayon vecteur de l'apocentre, par ϱ_1 celui du péricentre, on a nécessairement $w_2^2 > v_2^2$, donc $A_{w_2} > A$; par contre $A_{w_1} < A$, donc $A_{w_2} > A_{w_1}$. Or cela est évidemment en contradiction avec le théorème ci-dessus démontré, car, puisque $\varrho_2 > \varrho_1$, on devrait avoir, dans une région d'instabilité: $A_{w_2} < A_{w_1}$.

e. De là il suit immédiatement que *si le champ entier consiste en une seule région d'instabilité, comme c'est le cas, par exemple, pour toute loi de force* $F = \dfrac{f}{\varrho n}$, *où* $n > 3$, *une même trajectoire ne peut jamais présenter à la fois un péricentre et un apocentre.* Dans un pareil champ, toutes les trajectoires doivent donc conduire ou bien de l'infini à un péricentre (ou à une terminaison en spirale à cercle asymptotique intérieur), ou bien du centre à un apocentre (ou à une terminaison en spirale à cercle asymptotique extérieur), ou enfin de l'infini au centre.

f. Du corollaire *d* on peut encore déduire *qu'une trajectoire*

circulaire dans une région d'instabilité représente un état de mouvement instable, en ce sens que, à la suite d'un petit dérangement, la particule mobile s'éloignera finalement à une distance considérable de la trajectoire circulaire primitive. Après ce dérangement, en effet, soit le péricentre, soit l'apocentre, doit se trouver en dehors de la région d'instabilité.

g. Toute trajectoire qui part d'un point quelconque d'une région d'instabilité en direction centrifuge, avec une vitesse supérieure ou égale à la vitesse circulaire locale, doit nécessairement abandonner cette région au côté extérieur, ou, s'il s'étend à l'infini, posséder une branche qui se prolonge à l'infini. Cette conséquence vaut aussi pour la région de la raison inverse du cube.

En effet, un apocentre est impossible, parce que l'énergie totale de la trajectoire est égale ou supérieure à celle de la trajectoire circulaire locale et qu'il doit en rester ainsi pour toutes les trajectoires circulaires situées à l'extérieur de celle-ci. La trajectoire ne peut pas non plus se terminer en spirale à cercle asymptotique, car alors elle finirait par différer infiniment peu de la trajectoire circulaire asymptotique, et l'énergie de l'une et de l'autre devrait donc être la même. Or cela ne peut pas arriver, puisque l'énergie de la trajectoire surpasse celle de toutes les trajectoires circulaires extérieures. Qu'une trajectoire dont l'énergie est égale à celle de toutes les trajectoires circulaires dans une région de la raison inverse du cube ne se termine pas en spirale à cercle asymptotique, c'est ce que nous verrons plus tard, quand nous déterminerons la forme de cette trajectoire.

h Toute trajectoire qui part d'un point quelconque d'une région d'instabilité en direction centripète, avec une vitesse inférieure ou égale à la vitesse circulaire locale, doit nécessairement abandonner cette région ou, si elle s'étend jusqu'au centre, atteindre celui-ci. Cette conséquence vaut aussi pour la région de la raison inverse du cube.

7. Théorème II. *Le produit du rayon vecteur et de la vitesse* ($v\varrho$) *est, sur une même trajectoire, croissant avec la distance au centre tant que la vitesse de la particule surpasse la vitesse circulaire locale, décroissant dans le cas contraire.*

Des maxima et des minima de ce produit ne se rencontrent, à part les apocentres et les péricentres, que dans les points où la vitesse du mouvement est égale à la vitesse circulaire.

Si un pareil point est situé dans une RÉGION DE STABILITÉ, *le produit est un* MAXIMUM, *si dans une* RÉGION D'INSTABILITÉ, *un* MINIMUM.

Une région de répulsion peut être considérée, à cet égard, comme une région où la vitesse du mouvement surpasse constamment la vitesse circulaire locale.

Démonstration. Puisque A reste constant sur toute la trajectoire, on a:

$$d.\, v^2 \varrho^2 = d.\, (2\, A\, \varrho^2 - 2\, \varrho^2 \int_{\varrho_0}^{\varrho} F.\, d\varrho) =$$

$$= (4\, A\varrho - 4\varrho \int_{\varrho_0}^{\varrho} F.d\varrho - 2F\varrho^2) d\varrho = 4\varrho (A - A_w)\, d\varrho = 2\varrho (v^2 - w^2) d\varrho \,..(8)$$

d'où résulte la première partie de la proposition.

Ensuite, $v^2 \varrho^2$, et par conséquent aussi $v\, \varrho$, ne pourra prendre une valeur maximum ou minimum que:

1°. là où $d\, \varrho = 0$, c'est-à-dire, au *péricentre* et à l'*apocentre*. Dans chacun de ces deux points $v\, \varrho$ est minimum, ainsi qu'on le reconnaît aisément en remarquant que dans un *péricentre* on a nécessairement $v^2 > w^2$, de sorte qu'au voisinage immédiat $v^2\, \varrho^2$ doit croître avec la distance; tandis qu'à l'*apocentre* on a, au contraire, $v^2 < w^2$, d'où il suit qu'aux points à rayon vecteur plus petit $v^2\, \varrho^2$ doit être plus grand que dans l'*apocentre*.

2°. là où $w = v$. Lorsqu'un pareil point est situé dans une région de stabilité, A_w croît avec ϱ. En suivant la trajectoire en direction centrifuge, on a donc $A < A_w$ et, comme en outre ϱ croît, $v^2\, \varrho^2$ décroît. En direction centripète, on a $A > A_w$, mais $v^2\, \varrho^2$ décroît aussi dans cette direction, parce que ϱ y décroît. On a donc affaire à un maximum. Si le point est situé, au contraire, dans une région d'instabilité, on reconnaît, de la même manière, que $v^2\, \varrho^2$ est un minimum.

Pour savoir quels changements de valeur $v\varrho$ éprouve dans une région de répulsion, nous écrivons:

$$d.v^2\varrho^2=(4A\varrho-4\varrho\int_{\varrho_0}^{\varrho} F.d\varrho-2\,F.\varrho^2)\,d\,\varrho=2\varrho\,(v^2-F\varrho)\,d\varrho \quad \ldots (9)$$

d'où il ressort que, F étant négatif dans ce cas, $v\varrho$ doit toujours *croître* avec ϱ dans la région de répulsion.

Remarque. Nous avons admis tacitement que F et par suite w^2 ne changent pas par sauts. Là où un pareil changement a lieu, un examen spécial est nécessaire. Si, en effet, w^2 passe d'une valeur $< v^2$ à une valeur $> v^2$, il existe naturellement, en ce point aussi, un maximum ou un minimum.

Corollaires. a. Dans chaque *région de stabilité* il ne peut se trouver qu'un seul *maximum* de $v\varrho$, dans chaque *région d'instabilité* qu'un seul *minimum*, à l'exception toujours du péricentre et de l'apocentre. De l'accroissement ou du décroissement continu de A_w, depuis le côté interne jusqu'au côté externe d'une même région, il suit immédiatement, en effet, que dans une pareille région on ne peut avoir qu'une fois $v=w$ ou $A=A_w$.

b. De là aussi on peut déduire que dans une même région d'instabilité ne peuvent être situés à la fois le péricentre et l'apocentre d'une même trajectoire. Car au *péricentre* et à l'*apocentre* $v\varrho$ devient minimum, et entre ces deux points il devrait donc y avoir un maximum, ce qui est impossible dans une région d'instabilité.

Voir, en outre, les corollaires du théorème III.

8. THÉORÈME III. *L'angle aigu μ entre la tangente et le rayon vecteur est, sur une même trajectoire, décroissant avec la distance au centre tant que la vitesse de la particule surpasse la vitesse circulaire locale, croissant, dans le cas contraire.*

Des MAXIMA *et des* MINIMA *de μ, c'est-à-dire des points d'inclinaison maximum ou minimum, ne peuvent, à part les maxima dans l'apocentre et dans le péricentre, se trouver que là où la vitesse du mouvement est égale à la vitesse circulaire locale.*

Si un pareil point est situé dans une RÉGION DE STABILITÉ, *μ est un* MINIMUM, *si dans une* RÉGION D'INSTABILITÉ, *un* MAXIMUM.

Une région de répulsion peut de nouveau être considérée, à cet égard, comme une région où la vitesse du mouvement surpasse constamment la vitesse circulaire locale.

Démonstration. Puisque, sur une même trajectoire, $\frac{1}{2}\, v\varrho \sin\mu = B$ est une constante, $\sin\mu$, et par conséquent aussi μ, doit croître lorsque $v\varrho$ décroît, et inversement. De cette considération, combinée avec le *théorème* II, découlent toutes les propriétés de l'angle μ énoncées dans le *théorème* III.

Corollaires. a. Dans toute *région de stabilité* il ne peut y avoir qu'un seul *minimum* de μ, dans toute *région d'instabilité*, qu'un seul *maximum.*

b. Si d'un même point on fait partir, avec la même vitesse, des trajectoires différentes, les points d'inclinaison maximum et minimum de toutes ces trajectoires se trouvent sur les mêmes cercles, décrits autour du centre d'attraction.

En effet, la grandeur A ayant pour toutes ces trajectoires la même valeur, les vitesses doivent être égales pour des rayons vecteurs égaux, de sorte que le produit $v\varrho$, et par conséquent aussi l'angle μ, doit, dans toutes ces trajectoires, atteindre les mêmes valeurs maxima ou minima pour des valeurs égales du rayon vecteur.

c. En appliquant ce corollaire à l'*attraction en raison inverse du carré de la distance*, on retrouve immédiatement quelques beaux théorèmes très connus. Dans les trajectoires elliptiques décrites en vertu de cette loi, μ acquiert, en effet, ses valeurs minima aux extrémités du petit axe; de là résulte, en premier lieu, que:

Les extrémités des petits axes des trajectoires elliptiques qui partent d'un même point avec la même vitesse, sont toutes situées sur un même cercle, décrit autour du centre d'attraction.

Remarquant, en outre, que la distance du foyer aux extrémités du petit axe est égale au grand axe, on voit immédiatement que:

Toutes ces ellipses possèdent des grands axes égaux, et par

conséquent aussi, en vertu de la troisième loi de Kepler, des temps de révolution égaux.

Si l'on considère, enfin, que la vitesse aréolaire est $\frac{1}{2} v \varrho \sin \mu$ et que les aires de ces différentes ellipses doivent être entre elles comme les petits axes, il suit de l'égalité des temps de révolution que ces axes sont entre eux comme les vitesses aréolaires; par conséquent :

Les petits axes sont entre eux comme les sinus des angles compris entre le rayon vecteur et la direction primitive de la vitesse.

d. Si l'on applique le corollaire *b* à l'*attraction proportionnelle à la distance*, on reconnaît que les extrémités des *diamètres conjugués égaux* (car c'est là que se trouvent alors les points d'inclinaison maximum de la trajectoire), pour toutes les trajectoires partant d'un même point avec la même vitesse, sont situées sur le même cercle décrit du rayon $\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2}$, de sorte que la diagonale du rectangle construit sur les axes acquiert pour toutes ces ellipses des valeurs égales.

Dans la *région de la raison inverse du cube*, A_w reste constant. Si d'un point quelconque de cette région on fait donc partir une trajectoire avec une vitesse égale à la vitesse circulaire, $v\varrho$ et par conséquent μ restent constants, puisqu'on a alors partout, en vertu de (8), $d\, v^2 \varrho^2 = 0$.

La trajectoire décrite sera donc, dans ce cas, une spirale logarithmique.

9. Théorème IV. *Lorsqu'un point matériel se meut sur une trajectoire circulaire située dans une région de stabilité, et que le mouvement subit une légère altération, la nouvelle trajectoire acquiert un péricentre et un apocentre dont les distances au centre diffèrent très peu entre elles et du rayon de la trajectoire circulaire primitive.*

Si, au contraire, la trajectoire circulaire est située dans une région d'instabilité, il arrivera, après une légère perturbation, que la distance de l'apocentre au centre, ou celle du péricentre, ou celle de tous les deux, différera notablement du rayon de la trajectoire circulaire.

Démonstration. Après la perturbation, la trajectoire circulaire dont l'énergie totale est égale à celle de la nouvelle trajectoire devra, en général, se trouver un peu plus loin ou plus près du centre que l'ancienne trajectoire circulaire, mais ne s'éloigner pourtant de celle-ci qu'à une faible distance. Dans une région de stabilité, cette trajectoire circulaire de même énergie que la nouvelle trajectoire sera toujours coupée par celle-ci, car, si l'on suit la trajectoire dans la direction qui conduit à la trajectoire circulaire, l'angle aigu μ est décroissant, ainsi qu'on le reconnaît immédiatement en appliquant le premier alinéa du *théorème III* et en ayant égard à la propriété de la région de stabilité, que A_w y croît et décroît avec ϱ. Or, tant que μ décroît, la trajectoire continue certainement à s'éloigner ou à se rapprocher du centre, de sorte que, comme il a été dit, le cercle de même énergie doit toujours être atteint. Sur ce cercle, μ a une valeur minimum, $\varrho\, v$ une valeur maximum. Si l'on considère maintenant les deux branches qui partent de ce point d'intersection, on trouve que sur toutes les deux $\varrho\, v$ décroîtra, μ croîtra. Dans la branche centrifuge, en effet, l'énergie circulaire locale dépasse de plus en plus celle de la trajectoire, et $\varrho\, v$ doit donc diminuer lorsque ϱ augmente; dans la branche centripète, au contraire, l'énergie circulaire locale est plus petite que celle de la trajectoire, et par conséquent, sur cette branche aussi, $\varrho\, v$ doit décroître, puisque ϱ est décroissant. Ce décroissement de $\varrho\, v$ devient de plus en plus rapide à mesure que le point s'éloigne davantage de la trajectoire circulaire de même énergie. Or, dès le début, à cause de la faiblesse supposée de la perturbation, μ ne diffère que peu de 90°, et on voit donc que le décroissement de $v\,\varrho$ ne tardera pas à rendre $sin\, \mu = \frac{B}{\frac{1}{2} v\, \varrho}$ égal à l'unité, moment où sera atteint un *péricentre* ou un *apocentre*. La branche centrifuge devra donc conduire à un *apocentre*, et la branche centripète à un *péricentre*, sans que le rayon vecteur ait beaucoup augmenté ou diminué.

Si la trajectoire circulaire troublée est située au contraire dans une

région d'instabilité, on arrive aisément à conclure que, soit dans la branche centrifuge soit dans la branche centripète, à savoir dans la branche qui s'éloigne de la trajectoire circulaire dont l'énergie est égale à celle du mouvement troublé, μ devra continuer à décroître, et $v\varrho$ à croître, jusqu'à ce que la *région d'instabilité* soit abandonnée.

Sur l'autre branche, au contraire, celle qui se rapproche de la trajectoire circulaire de même énergie, $v\varrho$ décroîtra et μ croîtra, et il peut alors se présenter l'un des trois cas suivants: *ou bien* le cercle en question est atteint, et alors, à partir de ce moment, μ recommencera à décroître, et la trajectoire quittera aussi à l'autre côté la région d'instabilité; *ou bien* ce cercle fait fonction de cercle asymptotique de la trajectoire, laquelle se termine alors en spirale; *ou bien* le cercle n'est pas atteint, parce que, avant ce moment, s'est produit un *apocentre* ou un *péricentre*. La nature de la perturbation décidera laquelle de ces trois possibilités sera réalisée.

Corollaire. a. Si le champ entier est une seule région d'instabilité, la plus légère altération de la trajectoire circulaire d'un point matériel a pour conséquence que ce point finit par se rendre, ou bien au centre d'attraction, ou bien à une distance infinie de ce centre. Comme, dans une pareille région, toutes les autres trajectoires conduisent également soit au centre, soit à l'infini, un point matériel ne peut rester d'une manière durable dans cette région, à moins de retomber continuellement au centre. Quelque chose d'analogue à notre système solaire est donc impossible là où les forces attractives sont d'une nature telle, qu'elles donnent naissance à une région d'instabilité unique et continue.

III. Théorèmes sur les terminaisons en spirale à cercle asymptotique.

10. Théorème V. *Des terminaisons en spirale à cercle asymptotique ne peuvent exister que dans une région d'instabilité. Les trajectoires terminées en spirale à cercle asymptotique possèdent la même énergie totale et la même vitesse aréolaire que la trajectoire circulaire du cercle asymptotique.*

Démonstration. A mesure qu'une trajectoire terminée en spirale se rapproche de son cercle asymptotique intérieur ou extérieur, son rayon vecteur ϱ approche de plus en plus du rayon ϱ_1 du cercle asymptotique. Comme, en outre, toute la forme de la trajectoire, et par conséquent aussi son rayon de courbure, s'ajuste de plus en plus à celle du cercle asymptotique, v devra approcher de w_1, μ de 90°. Toute fonction $f(\varrho, v, \mu)$ devra donc avoir pour limite $f(\varrho_1, w_1, 90°)$. Cela s'applique aussi à l'énergie totale et à la vitesse aréolaire de la trajectoire, mais, puisque ces quantités sont constantes, elles doivent posséder cette valeur limite dès le début. On devra donc avoir, tout le long de la trajectoire:

$$A = \tfrac{1}{2} v^2 + \int_{\varrho_0}^{\varrho} F.\,d\varrho = \tfrac{1}{2} w^2_1 + \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} F.\,d\varrho = A_{w_1} \quad . \; . \quad (19)$$

$$B = \tfrac{1}{2} \varrho \mu \sin v = \tfrac{1}{2} \varrho_1 w_1 . = B_{w_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

De cette dernière équation on tire:

$$\sin \mu = \frac{\varrho_1 w_1}{\varrho v} \quad ; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

or, de là résulte immédiatement, eu égard au *théorème* II, que de pareilles terminaisons en spirale sont impossibles dans une *région de stabilité.* Considérons d'abord, en effet, une terminaison spirale à cercle asymptotique extérieur. Ici, $A = A_{w_1}$ devra partout surpasser l'énergie locale du mouvement circulaire, puisque l'énergie circulaire croît avec le rayon et devra donc, à l'intérieur du cercle asymptotique, être partout moindre que sur ce cercle même. Mais alors, en vertu du premier alinéa du théorème II, ϱv doit croître avec ϱ, et l'on devrait donc avoir partout $\varrho v < \varrho_1 w_1$, ce qui ferait de l'équation (12) une absurdité.

De la même manière on peut établir que les terminaisons spirales à cercle asymptotique intérieur sont impossibles. Ici A devrait être constamment plus petit que l'énergie locale du mouvement circulaire; à mesure que ϱ décroît, ϱv devrait donc croître; d'où résulterait de nouveau $\varrho v > \varrho_1 w_1$.

Que des terminaisons spirales à cercle asymptotique ne peuvent pas exister dans une *région de répulsion*, c'est ce qui n'a pas besoin, sans doute, de démonstration spéciale.

Dans une *région de la raison inverse du cube* elles n'apparaîtront pas non plus. Comme l'énergie circulaire locale est alors partout la même, il n'y a à considérer que les trajectoires dont l'énergie totale est égale à celle du mouvement circulaire; mais, dans de pareilles trajectoires, μ reste constant.

Les terminaisons spirales à cercle asymptotique ne sont donc possibles que dans une *région de stabilité*, et là, ainsi que nous le verrons, elles peuvent se présenter aux deux côtés de toute trajectoire circulaire.

Corollaires. a. A l'intérieur d'une même région d'instabilité une même trajectoire ne peut pas posséder deux terminaisons spirales à cercle asymptotique. En effet, l'énergie totale du mouvement circulaire décroissant régulièrement à mesure qu'on s'éloigne du centre, il est impossible que l'énergie totale de la trajectoire soit égale à celle de deux trajectoires circulaires différentes dans cette même région.

b. Une trajectoire spirale à cercle asymptotique intérieur doit avoir son apocentre, si elle en possède un, en dehors de la région d'instabilité où est situé le cercle asymptotique, car, dans cette région, son énergie totale surpasse partout celle du mouvement circulaire.

c. Une trajectoire spirale à cercle asymptotique extérieur doit avoir son péricentre, si elle en possède un, en dehors de la région d'instabilité dans laquelle est situé le cercle asymptotique.

11. Théorème VI. *Par tout point situé dans une région d'instabilité on peut faire passer une trajectoire ayant la même vitesse aréolaire et la même énergie totale qu'une trajectoire circulaire donnée quelconque située dans la même région d'instabilité. Une pareille trajectoire se termine en général, au côté tourné vers la trajectoire circulaire, en une spirale ayant cette trajectoire circulaire pour cercle asymptotique. Des exceptions à cette règle peuvent se présenter lorsque, dans la trajectoire circulaire, la force attractive elle-même, ou sa première dérivée par rapport au rayon, devient infinie.*

Démonstration. Soit ϱ_1 le rayon du cercle qui doit devenir le cercle asymptotique extérieur ou intérieur de la spirale qu'on veut mener par un point P, situé dans la même région d'instabilité, à une distance ϱ_2 du centre. On a alors pour calculer v_2 et μ_2, c'est-à-dire la grandeur et la direction de la vitesse nécessaire en P:

$$A = \tfrac{1}{2} v_2^2 + \int_{\varrho_0}^{\varrho_2} F\, d\varrho = \tfrac{1}{2} w_1^2 + \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} F\, d\varrho = A_{w_1} \quad \ldots \quad (13)$$

$$B = \tfrac{1}{2} v_2\, \varrho_2 \sin \mu_2 = \tfrac{1}{2} w_1\, \varrho_1 = B_{w_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Au premier abord, il semblerait peut-être que v_2 pût devenir imaginaire, ou $\sin \mu_2$ plus grand que l'unité.

Pour montrer que v_2 est toujours réel, nous tirons de (13):

$$v_2^2 = w_1^2 + \int_{\varrho_2}^{\varrho_1} F\, d\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

De là il résulte immédiatement que, pour $\varrho_2 < \varrho_1$, on aura nécessairement $v_2^2 > w_1^2$, et par conséquent v_2 réel. Si, au contraire, $\varrho_2 > \varrho_1$, on a:

$$A = A_{w_1} > A_{w_2},$$

donc:

$$v_2^2 > w_2^2,$$

et alors également réel.

Pour prouver qu'on a $w_1\, \varrho_1 < v_2\, \varrho_2$ et par conséquent $\sin \mu < 1$, faisons partir du point P, avec la vitesse v_2, une trajectoire radiale dirigée vers le cercle asymptotique. Il est facile de voir que cette trajectoire doit toujours atteindre ce cercle. Au point de rencontre on a $v = w_1$, mais en outre, d'après le *Théorème* II, $v\varrho$ y est un minimum. Partout ailleurs, par conséquent aussi en P, on a donc $v\varrho > w_1\, \varrho_1$.

Ainsi se trouve démontré que, par chaque point de la région d'instabilité, on peut mener une trajectoire qui possède la même vitesse aréolaire et la même énergie qu'une trajectoire circulaire

donnée dans cette même région. Si l'on suit une pareille trajectoire dans la direction qui conduit à la trajectoire circulaire, il est d'abord clair qu'elle ne peut jamais dépasser celle-ci: au point d'intersection, en effet, les vitesses des deux trajectoires devraient, par suite de l'égalité de vitesse aréolaire et d'énergie, être identiques en grandeur et en direction; mais alors il n'y a plus d'intersection. La trajectoire ne peut pas non plus cesser de se rapprocher de la trajectoire circulaire. Cela ne pourrait avoir lieu que si μ passait par 90°; or, en comparant la vitesse en un point quelconque avec la vitesse qui existe, à la même distance, sur la trajectoire rectiligne radiale considérée auxiliairement ci-dessus, on reconnaîtra qu'on a toujours

$$v \varrho > w_1 \varrho_1$$

et que par conséquent $\sin \mu$ est toujours plus petit que l'unité.

Deux cas restent maintenant possibles: ou bien la trajectoire, après un nombre fini de circonvolutions, vient à toucher la trajectoire circulaire et présente alors en ce point un contact d'ordre supérieur [1]), ou bien elle continue à se rapprocher

---

[1]) Mon attention a été attirée sur ces deux possibilités par une note de M. J. Boussinesq (*Comptes rendus*, LXXXIV, p. 944—946). Il y parle d'„une trajectoire circulaire $r = r_0$ telle que le mobile pourra à partir d'un quelconque de ses points et sans que les équations différentielles cessent d'être satisfaites, soit continuer à la parcourir, soit en dévier pour décrire une nouvelle trajectoire". Cela s'applique donc à *toutes* les trajectoires circulaires dans une région d'instabilité. En général, toutefois, le point matériel n'a *pas* le choix entre les deux trajectoires, car, pour arriver par la trajectoire spirale à une distance finie de la trajectoire circulaire, il doit parcourir un chemin infiniment long, en un temps infiniment long. Pourtant le moindre dérangement fini le porte, de la trajectoire circulaire, sur une trajectoire qui en un temps fini conduit à une distance finie de la trajectoire circulaire, distance qui peut continuer à croître longtemps et considérablement.

Comme cas très particulier, il peut aussi se présenter des trajectoires circulaires où il existe effectivement un choix entre deux trajectoires. Cela peut arriver lorsque F ou $\frac{dF}{d\varrho}$ devient infiniment grand sur la trajectoire

asymptotiquement de la trajectoire circulaire. Entre ces deux cas on peut décider en calculant le temps nécessaire pour que le point matériel parvienne, sur la trajectoire que nous étudions, de la distance ϱ, où il est initialement, à la distance ϱ_1, égale au rayon de la trajectoire circulaire.

On a:

$$\frac{d\varrho}{dt} = v \cos\mu = \sqrt{v^2 - v^2 \sin^2\mu} = \sqrt{v^2 - \frac{w_1^2\,\varrho_1^2}{\varrho^1}} =$$

$$= \sqrt{\left(w_1^2 + 2\int_\varrho^{\varrho_1} F.d\varrho - \frac{w_1^2\,\varrho_1^2}{\varrho^2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

de sorte qu'on trouve pour le temps:

$$T_{\varrho_2}^{\varrho_1} = \int_{\varrho_2}^{\varrho_1} \frac{\varrho.\,d\varrho}{\sqrt{w_1^2\,(\varrho^1 - \varrho_1^2) + 2\,\varrho^2 \int_\varrho^{\varrho_1} F.d\varrho}} \quad \ldots \quad (17)$$

---

circulaire. Comme exemple, j'indiquerai la trajèctoire circulaire $\varrho=\varrho_1$ décrite sous l'action de la force $F = \frac{A}{\varrho^3} - f(\varrho - \varrho_1)^{1/3}$. Cette trajectoire est située dans une région d'instabilité. Par un point P, situé à la distance ϱ_1 du centre, on peut faire passer une trajectoire:

$$\tfrac{1}{2}\,v^2 = \tfrac{1}{2}\,w_1^2 + \int_\varrho^{\varrho_1} F.d\varrho \qquad \varrho v \sin\mu = \varrho_1\,w_1\,.$$

Cela exige:

$$v^2 = \frac{A}{\varrho^2} + \frac{3}{2} f(\varrho - \varrho_1)^{\frac{4}{3}}\,; \qquad \sin^2\mu = \frac{A}{A + \frac{3}{2} f \varrho^2 .\, (\varrho - \varrho_1)^{\frac{4}{3}}}\,.$$

Le temps nécessaire pour aller de la distance ϱ_2 à la distance ϱ_1 est alors:

$$T_{\varrho_2}^{\varrho_1} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \int_{\varrho_2}^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{f^{\frac{1}{2}}(\varrho - \varrho_1)^{\frac{2}{3}}} \doteq \sqrt{6}\,f.\,(\varrho_1 - \varrho_2)^{\frac{1}{3}}\,,$$

et comme la vitesse est partout finie, cette trajectoire doit conduire par un arc de longueur finie à la trajectoire circulaire. Réciproquement, la particule peut à chaque instant passer de la trajectoire circulaire à la trajectoire en question.

De cette intégrale nous ne considérons que la partie pour laquelle l'argument ϱ ne diffère encore que très peu de ϱ_1. Posant donc:

$$w_1^2(\varrho^2-\varrho_1^2)+2\varrho^2\int_{\varrho}^{\varrho_1}F\,d\varrho=\varphi(\varrho)\,,\quad\ldots\quad(18)$$

on aura:

$$\varphi(\varrho)=\varphi(\varrho_1)+(\varrho-\varrho_1)\varphi'(\varrho_1)+\frac{(\varrho-\varrho_1)^2}{1.2}\varphi''(\varrho_1+\theta(\varrho-\varrho_1));(19)$$

mais:

$$\varphi(\varrho_1)=0;\varphi'(\varrho)=2\varrho w_1^2+4\varrho\int_{\varrho}^{\varrho_1}F d\varrho-2\varrho^2F;\varphi'(\varrho_1)=0,\ \ldots\ (20)$$

$$\varphi''(\varrho)=2w_1^2+4\int_{\varrho}^{\varrho_1}F\,d\varrho-8\varrho F-2\varrho^2\frac{dF}{d\varrho},$$

$$\varphi''(\varrho_1)=-6w_1^2-2\varrho_1^2\left(\frac{dF}{d\varrho}\right)_1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (21)$$

Nous pouvons donc poser:

$$T_{\varrho}^{\varrho_1}=\int_{\varrho}^{\varrho_1}\frac{\varrho.\,d\varrho}{(\varrho-\varrho_1)\sqrt{\frac{1}{2}\varphi''(\varrho_1+\theta(\varrho-\varrho_1))}}\ .\ \ldots\ (22)$$

Or, dans une région d'instabilité, $\varphi''(\varrho_1)$ est toujours positif; on y a, en effet:

$$\frac{d.\,F\varrho^3}{d\varrho}<0,$$

donc

$$\varrho^3\frac{dF}{d\varrho}+3\varrho^2F<0,$$

donc:

$$\left(3w^2+\varrho^2\frac{dF}{d\varrho}\right)\varrho<0,\ \ldots\ldots\ldots\ (23)$$

d'où il suit immédiatement que $\varphi''(\varrho_1)$ doit être positif.

Soit, en outre, α la plus grande et β la plus petite des valeurs que l'expression

$$\frac{1}{\varrho}\sqrt{\tfrac{1}{2}\varphi''(\varrho_1+\theta(\varrho-\varrho_1))} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

prend entre les limites ϱ et ϱ_1; la valeur de $T_{\varrho}^{\varrho_1}$ est alors comprise entre les limites:

$$\frac{1}{\alpha}\int_{\varrho}^{\varrho_1}\frac{d\varrho}{\varrho-\varrho_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\beta}\int_{\varrho}^{\varrho_1}\frac{d\varrho}{\varrho-\varrho_1}\,; \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

c'est-à-dire qu'elle est, en tout cas, infiniment grande. On a donc toujours affaire à des trajectoires qui se rapprochent asymptotiquement de la trajectoire circulaire, sans l'atteindre, sauf dans le cas *très* particulier où:

$$\varphi''(\varrho_1) = -6F_1\varrho_1 - 2\varrho_1^2\left(\frac{dF}{d\varrho}\right)_1 = \infty \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Ce cas demande naturellement un examen spécial, qui tantôt conduira à un contact d'ordre supérieur, tantôt à une spirale à cercle asymptotique, comme dans le cas général.

Corollaire. a. Dans une région d'instabilité, des trajectoires spirales à cercle asymptotique sont possibles aux deux côtés de toute trajectoire circulaire. Les cercles limites entre une région d'instabilité et une region de stabilité ou de répulsion sont les seuls qui ne peuvent être asymptotiques que d'un côté à une trajectoire spirale.

12. Théorème VII. *De chaque point on peut faire partir, avec une vitesse donnée* v_1, *autant de trajectoires* $\frac{\textit{centrifuges}}{\textit{centripètes}}$ *terminées en spirale à cercle asymptotique qu'il y a, sur la trajectoire* $\frac{\textit{centrifuge}}{\textit{centripète}}$ *radiale commencée au même point avec la même vitesse, de valeurs minima de* v_ϱ, *plus petites que les valeurs minima précédentes (comptées depuis le point* $\frac{\textit{jusqu'à l'infini}}{\textit{jusqu'au centre}}$*) et plus pe-*

tites aussi (mais non NULLES) *que la valeur $v_1 \varrho_1$ de ce produit au point même. Les cercles asymptotiques de ces terminaisons spirales passent par les points de la trajectoire radiale où se trouvent les valeurs minima de $v\varrho$.*

Démonstration. Soit $v_2\varrho_2$ une pareille valeur minimum: on pourra alors, puisque $v_2 \varrho_2 < v_1 \varrho_1$, faire partir du point donné, avec la vitesse v_1, une trajectoire sous l'angle μ_1, de sorte que

$$B = \tfrac{1}{2} v_1 \varrho_1 \sin \mu_1 = \tfrac{1}{2} v_2 \varrho_2.$$

Si $\varrho_2 > \varrho_1$, on donnera à cette trajectoire une direction centrifuge, dans le cas contraire, une direction centripète. Un *apocentre* ou un *péricentre* ne pourra alors apparaître avant que le rayon vecteur n'ait pris la valeur ϱ_2: car entre ϱ_1 et ϱ_2 on a partout sur la trajectoire radiale, et par conséquent aussi sur la trajectoire émise, $v\varrho > v_2\varrho_2$, donc $\sin \mu < 1$.

Un minimum de $v\varrho$ ne peut, suivant le *théorème* II, être situé que dans une région d'instabilité. Mais, dès que la trajectoire s'engage dans cette région, les raisonnements qui ont servi à démontrer le *théorème* VI sont applicables et, sauf l'exception mentionnée dans ce théorème, la trajectoire finira donc en spirale à cercle asymptotique, ϱ_2 devenant le rayon de ce cercle.

Un minimum de $v \varrho$ *plus grand* que $v_1\varrho_1$ ou qu'un minimum antérieur ne saurait donner lieu à une terminaison en spirale à cercle asymptotique. En effet, lorsqu'on veut donner à la trajectoire la vitesse aréolaire requise, $\sin \mu$ devient dans l'un des cas immédiatement > 1, tandis que dans l'autre cas on a $\sin \mu > 1$ pour des valeurs du rayon vecteur qui correspondent à un minimum antérieur. La trajectoire doit donc, avant que cette valeur soit atteinte, présenter un *apocentre.*

On reconnaît facilement, d'ailleurs, que toute spirale à cercle asymptotique, qui part du point donné avec la vitesse donnée, doit nécessairement avoir pour cercle asymptotique l'un des cercles qui passent par les points où $v\varrho$ acquiert, sur la trajectoire radiale, des valeurs minima.

Soit, en effet, ϱ_2 le rayon du cercle asymptotique; on a alors:

$$A = A_{w_2},$$

donc:

$$lim.\ v = v_2 = w_2,$$

et puisque les terminaisons en spirale à cercle asymptotique ne peuvent se produire que dans une région d'instabilité, la trajectoire radiale présente en ce point, d'après le théorème II, un minimum de $v\,\varrho$.

IV. Théorèmes concernant l'extension de la trajectoire jusqu'au centre et jusqu'à l'infini.

13. Théorème VIII. *Lorsque d'un point quelconque P partent deux trajectoires centripètes à vitesses initiales égales, la distance péricentrique qui appartient à la trajectoire la plus inclinée doit être plus petite (à moins que les trajectoires ne conduisent toutes les deux au centre) que celle de la trajectoire moins inclinée.*

Si d'un pareil point partent, au contraire, deux trajectoires centrifuges de même vitesse initiale, mais de direction différente, la distance apocentrique de la trajectoire la plus inclinée devra être plus grande que celle de la trajectoire moins inclinée, à moins que toutes les deux ne conduisent à l'infini.

Démonstration. Si l'on compare entre eux ceux des points des deux trajectoires centripètes dont les rayons vecteurs sont égaux, les vitesses en ces points sont pareillement égales. Or le produit $v\,\varrho\,sin\,\mu$ est, pour la trajectoire plus inclinée, constamment plus petit que pour la trajectoire moins inclinée, et par conséquent $sin\,\mu$ doit, dans la trajectoire la plus inclinée, être plus petit que dans l'autre. Si maintenant la trajectoire moins inclinée conduit à un péricentre ou à une spirale à cercle asymptotique, on a en ces points $sin\,\mu = 1$, et pour la trajectoire plus inclinée $sin\,\mu$ est donc encore < 1, de sorte que cette trajectoire continue en direction centripète et donne lieu à des valeurs plus petites du rayon vecteur.

La seconde partie du théorème se démontre par un raisonnement analogue.

Corollaires. a. Lorsqu'une trajectoire partant d'un point déterminé conduit au centre, toutes les trajectoires plus inclinées partant de ce même point, avec la même vitesse, conduisent également au centre.

b. Une pareille trajectoire conduit-elle, au contraire, à un *péricentre* ou à une *spirale à cercle asymptotique*, alors, chez toutes les trajectoires moins inclinées et de même vitesse initiale, la branche centripète se termine d'une de ces deux manières.

c. Lorsqu'une trajectoire centrifuge conduit à l'infini, il en est de même de toutes les trajectoires plus inclinées à vitesse initiale égale.

d. Une pareille trajectoire conduit-elle à un *apocentre* ou à une *spirale à cercle asymptotique*, alors les trajectoires moins inclinées ne peuvent pas conduire à l'infini.

14 Théorème IX. *Si une trajectoire s'étend jusqu'au centre, on aura, lorsqu'elle en approche:*

$$lim\, v^2 \varrho^2 = lim\, w^2 \varrho^2 = lim\, F \varrho^3 \;\ldots\ldots\; (27)$$

Démonstration. Soient ϱ_1 le rayon vecteur d'un des points par lesquels la trajectoire passe, v_1 la vitesse en ce point; on a:

$$v^2 = v_1^2 + 2\int_{\varrho}^{\varrho_1} F\, d\varrho \;\ldots\ldots\ldots\; (28)$$

donc:

$$lim\; \varrho^2 v^2 = lim\, 2\, \varrho^2 \int_{\varrho}^{\varrho_1} F\, d\varrho \;\ldots\ldots\; (29)$$

Si, *en premier lieu*, $lim \int_{\varrho}^{\varrho_1} F\, d\varrho$ est finie, *lim* $v\varrho$ *est* zéro, mais alors il faut que $lim\, F\varrho^3$ soit également zéro; car si $lim\, F\varrho^3$ était finie, on pourrait, depuis une certaine valeur ϱ'

du rayon vecteur jusqu'au centre, poser:

$$F\varrho^3 > \gamma,$$

γ étant fini. Mais alors on aurait:

$$\lim \int_{\varrho}^{\varrho_1} F\,d\varrho > \gamma . \lim \int_{\varrho}^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\varrho^3} = \infty .$$

Si, *en second lieu*, $\lim \int_{\varrho}^{\varrho_1} F\,d\varrho$ est infinie, on peut écrire:

$$\lim \varrho^2 v^2 = \lim \frac{2\int_{\varrho}^{\varrho_1} F\,d\varrho}{\varrho^{-2}} = \lim \frac{-2F}{-2\,\varrho^{-3}} = \lim F\varrho^3 = \lim w^2\varrho^2,$$

de sorte que dans les deux cas le théorème est démontré.

15. Théorème X^a. *Lorsque le centre est entouré d'une région de répulsion, ou qu'au centre on a* $\lim F\varrho^3 = 0$, *il n'y a que les trajectoires radiales qui puissent conduire au centre. Toutes les autres trajectoires, qui pénètrent dans la région de répulsion ou de stabilité entourant le centre, possèdent un péricentre dans cette région.*

Si au centre on a $F\varrho^3 = \alpha^2$, *les trajectoires dont la vitesse aréolaire est plus petite que* $\frac{1}{2}\alpha$, *et parfois aussi celles dont la vitesse aréolaire est égale à* $\frac{1}{2}\alpha$, *seront les seules qui puissent atteindre le centre.*

Démonstration. Représentons-nous une trajectoire conduisant à un centre où $F\varrho^3$ approche de zéro: $v\varrho$ approchera donc aussi indéfiniment de zéro; mais alors la vitesse aréolaire $\frac{1}{2} v \varrho \sin\mu$, qui doit être constante, ne peut pas non plus différer de zéro. La trajectoire doit donc être radiale.

Si le centre est entouré d'une région de répulsion et que $F\varrho^3$ tende vers zéro, le même raisonnement est applicable. Si $\lim F\varrho^3$ a une valeur négative, finie ou infinie, même une trajectoire radiale ne peut conduire au centre, du moins lorsque la vitesse initiale est finie, ce que d'ailleurs nous supposons toujours.

Lorsque $F\varrho^3$ tend vers une valeur limite α positive et finie, ce qui peut arriver aussi bien dans une région de stabilité que dans une région d'instabilité, $\frac{1}{2} v \varrho \sin \mu$ doit, au voisinage du centre et par conséquent aussi partout ailleurs, posséder la valeur $\frac{1}{2} \alpha \sin \mu_0$, où μ_0 représente la valeur limite vers laquelle tend l'angle μ en approchant du centre; la vitesse aréolaire de *toutes* les trajectoires qui passent par le centre est donc plus petite que $\frac{1}{2}\alpha$.

Si de pareilles trajectoires atteignent le centre, μ tend vers une certaine limite, et elles prennent alors près du centre la forme d'une spirale logarithmique, qui entoure le centre d'un nombre infini de circonvolutions, mais l'atteint néanmoins en un temps fini.

16. Quant à la question de savoir si une trajectoire dont la vitesse aréolaire est *exactement* $\frac{1}{2}\alpha$ peut conduire au centre, la solution en est un peu plus compliquée. Dans une semblable trajectoire on doit, au voisinage du centre, avoir nécessairement $\lim \mu = 90°$, puisque $v \varrho \sin \mu = \alpha$ et $\lim v^2 \varrho^2 = \lim F \varrho^3 = \alpha^2$. Dans ce voisinage, la trajectoire doit donc nécessairement devenir, en direction centripète, de moins en moins inclinée. Cela ne peut être le cas, comme nous le savons, que si $v > w$. On doit donc avoir: $\lim v \geqq \lim w$. Soit ϱ_1 le rayon vecteur d'un point si rapproché du centre que, depuis ce point jusqu'au centre, le produit $F\varrho^3$ varie régulièrement dans le même sens; posons:

$$F\varrho^3 = \alpha^2 + \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

ε est alors une quantité qui dans une région de stabilité est *positive*, dans une région d'instabilité *négative*, et qui approche de *zéro* en même temps que ϱ.

On a alors:

$$v^2 = v_1^2 + 2\int_\varrho^{\varrho_1} F\, d\varrho = v_1^2 + \frac{\alpha^2}{\varrho^2} - \frac{\alpha^2}{\varrho_1^2} + 2\int_\varrho^{\varrho_1} \frac{\varepsilon}{\varrho^3}\, d\varrho \quad \ldots \quad (31)$$

$$w^2 = F\varrho = \frac{\alpha^2}{\varrho^2} + \frac{\varepsilon}{\varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

et:

$$v_1 \varrho_1 \sin \mu_1 = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

De ces trois relations il résulte:

$$v^2 - w^2 = v_1^2 \cos^2 \mu_1 + \left[2 \int_\varrho^{\varrho_1} \frac{\varepsilon}{\varrho^3} d\varrho - \frac{\varepsilon}{\varrho^2} \right] \quad . \; . \; . \; (34)$$

Or, il est facile de voir que lorsque ε décroît d'une manière continué depuis ϱ_1 jusqu'à ϱ on a, en valeur *absolue*:

$$\lim 2 \int_\varrho^{\varrho_1} \frac{\varepsilon}{\varrho^3} d\varrho > \lim \frac{\varepsilon}{\varrho^2} \; ;$$

là où ε est positif, comme c'est le cas dans une région de stabilité, la condition $\lim v > \lim w$ pourra donc toujours être satisfaite. Une trajectoire émise, avec la vitesse aréolaire α, du point dont le rayon vecteur est ϱ_1, devra nécessairement approcher indéfiniment du centre; par conséquent:

THÉORÈME X^b. *Lorsque le centre est entouré d'une région de stabilité, il pourra toujours y avoir des trajectoires qui, partant avec la vitesse aréolaire $\frac{1}{2}\alpha$, approchent indéfiniment du centre.*

En ce qui concerne le temps nécessaire pour parvenir, du point dont le rayon vecteur est ϱ_1, au centre, on peut remarquer (voir (16)) que:

$$T = \lim \int_\varrho^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{v^2 - v^2 \sin^2 \mu}} =$$

$$= \lim \int_\varrho^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{v^2 - \frac{\alpha^2}{\varrho^2}}} = \lim \int_\varrho^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{v_1^2 - \frac{\alpha^2}{\varrho_1^2} + 2 \int_\varrho^{\varrho_1} \frac{\varepsilon}{\varrho^3} d\varrho}} \; . \; (35)$$

Comme on a toujours:

$$v_1 \varrho_1 > \alpha^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (36)$$

et que dans une région de stabilité ε est positif, le dénominateur ne tend pas vers zéro et le temps devient fini; par conséquent:

THÉORÈME X^c. *Dans une région de stabilité, qui entoure le centre, le temps nécessaire pour atteindre le centre est toujours fini.*

17. Pour rechercher si les trajectoires dont la vitesse aréolaire est $\frac{1}{2}\alpha$ peuvent aussi atteindre le centre dans une région d'instabilité, nous supposerons $F\varrho^3$ développé suivant les puissances ascendantes de ϱ; on a alors, d'après (30):

$$\varepsilon = \varrho\left(\frac{d.F\varrho^3}{d\varrho}\right)_0 + \frac{\varrho^2}{1.2}\left(\frac{d.^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)_0 + \frac{\varrho^3}{1.2.3}\left(\frac{d.^3F\varrho^3}{d\varrho^3}\right)_0 + \text{etc.} \quad (37)$$

et de (34) il résulte:

$$v^2 - w^2 = v_1^2 \cos^2\mu_1 + \left\{\frac{1}{\varrho} - \frac{2}{\varrho_1}\right\}\left(\frac{d.F\varrho^3}{d\varrho}\right)_0 +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[2\,l\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right) - 1\right]\left(\frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)_0 + \frac{1}{6}\left[2\varrho_1 - 3\varrho\right]\left(\frac{d.^3F\varrho^3}{d\varrho^3}\right)_0 + \text{etc.} \quad (38)$$

En général, le deuxième terme du second membre prend, au centre, une valeur infinie négative. Il est donc, en général, impossible de choisir v_1 de telle sorte que la condition $v > w$, au voisinage du centre, soit satisfaite. La même chose s'applique — si $\left(\frac{d.F\varrho^3}{d\varrho}\right)_0$ était accidentellement *zéro* — au troisième terme du second membre, car alors $\left(\frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)$ doit devenir négatif, puisque autrement on aurait affaire à une région de stabilité, et le terme devient évidemment infiniment grand pour $\varrho = 0$; par conséquent:

THÉORÈME X^d. *Dans une région d'instabilité, qui entoure le centre, les trajectoires partant avec la vitesse aréolaire* $\frac{1}{2}\alpha$ *ne peuvent atteindre le centre, à moins que* $\lim. \frac{dF\varrho^3}{d\varrho}$ *et* $\lim. \frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}$ *ne soient toutes deux égales à zéro.*

Dans le cas très particulier où $\lim. \frac{dF\varrho^3}{d\varrho}$ et $\lim. \frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}$ sont l'une et l'autre *zéro*, il est possible, pour des valeurs suffisamment grandes de v_1, d'obtenir des trajectoires qui, avec la vitesse aréolaire $\frac{1}{2}\alpha$, dans une région d'instabilité, conduisent au centre.

Pour l'expression du temps nécessaire pour atteindre le centre, on trouve, par substitution dans l'équation (35):

$$T = \lim \int_{\varrho}^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{v_1^2 - \frac{\alpha^2}{\varrho_1^2} + \frac{1}{3}(\varrho_1 - \varrho)\left(\frac{d^3 F\varrho^3}{d\varrho^3}\right)_0 + \frac{1}{24}(\varrho_1^2 - \varrho^2)\left(\frac{d^4 F\varrho^3}{d\varrho^4}\right)_0 + \text{etc.}}} \quad (3$$

En général, cette intégrale est finie. Cela est même *toujours* le cas lorsque $\left(\frac{d^3 F}{d\varrho^3}\right)_0$ n'est pas zéro. C'est seulement *lorsque* cette expression s'annule que le temps peut devenir infiniment grand. Comme exemple, nous prendrons une trajectoire décrite sous l'influence de la force:

$$F = \frac{\alpha^2}{\varrho^3} - \beta\varrho.$$

En désignant par ϱ_1 le rayon vecteur d'un point situé dans la région d'instabilité qui entoure le centre, par v_1 la vitesse en ce point, et par μ_1 l'angle qu'y font la tangente et le rayon vecteur, on trouve pour le temps nécessaire pour atteindre le centre, si $v_1 \varrho_1 \sin \mu_1 = \alpha$:

$$T = \lim \int_{\varrho}^{\varrho_1} \frac{d\,\varrho}{\sqrt{v_1^2 - \frac{\alpha^2}{\varrho_1^2} - \beta(\varrho_1^2 - \varrho^2)}}$$

En choisissant v_1 de façon que

$$v_1^2 = \frac{\alpha^2}{\varrho_1^2} + \beta\,\varrho_1^2,$$

le temps nécessaire pour atteindre le centre devient infiniment grand, et la preuve qu'une pareille trajectoire peut être émise résulte de la valeur que doit prendre μ_1; on trouve, en effet:

$$\sin \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{\alpha^2}\varrho_1^4}},$$

valeur toujours réalisable.

Toutes les trajectoires plus inclinées, qui partent de ce point avec la vitesse aréolaire $\frac{1}{2}\alpha$, atteignent le centre en un temps fini; les trajectoires moins inclinées ne l'atteignent pas.

18. Théorème XI. *Dans une région d'instabilité qui s'étend jusqu'à l'infini, la vitesse circulaire est plus grande que la vitesse qui doit être donnée à une particule matérielle pour qu'en direction radiale elle atteigne l'infini. Dans une région de stabilité qui s'étend jusqu'à l'infini, la relation est inverse.*

Demonstration. La première partie du théorème est, en réalité, déjà démontrée dans le *Corollaire g* du premier théorème, car, si une trajectoire émise dans une direction oblique atteint l'infini, cela devra, en vertu du théorème VIII, être à fortiori le cas pour une trajectoire radiale.

Voici une autre démonstration, qui embrasse aussi la seconde partie du théorème. Soit ϱ_1 la distance d'un point quelconque situé dans une pareille région $\frac{\text{d'instabilité}}{\text{de stabilité}}$, on a alors pour toute distance plus grande: $F\varrho_3 \lesseqgtr F_1\varrho_1^3$, par conséquent:

$$\int_{\varrho_1}^{\infty} F\,d\varrho \lesseqgtr F_1\varrho_1^3 \int_{\varrho_1}^{\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^3} \lesseqgtr \tfrac{1}{2} F_1\,\varrho_1 \cdot, \quad \ldots \quad (40)$$

donc, en désignant par u_1 la vitesse nécessaire pour atteindre en direction radiale l'infini:

$$u_1 \lesseqgtr w_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

suivant que la région en question est une région d'*instabilité* ou de *stabilité*.

Corollaire a. Toute trajectoire qui, dans une région de stabilité, part avec une vitesse supérieure ou égale à u_1, *devra nécessairement posséder une branche prolongée à l'infini.*

En effet, d'après ce qui a été démontré, si l'on suit la trajectoire en direction centrifuge, la vitesse sur la trajectoire, qui doit toujours rester suffisante pour conduire à l'infini, surpassera

partout la vitesse circulaire locale; par conséquent, il ne peut pas se produire un apocentre.

19. Théorème XII. *Lorsqu'une trajectoire se prolonge jusqu'à l'infini, et que partout la vitesse est tout juste suffisante pour conduire à l'infini le long de la trajectoire radiale, on a:*

$$lim\, v\varrho = lim \sqrt{F\varrho^3} = lim\, w\varrho.$$

Démonstration. Soit u_1 la vitesse à la distance ϱ_1 du centre; on a alors, par hypothèse:

$$u_1^2 = 2\int_{\varrho_1}^{\infty} F\,d\varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (42)$$

Partout ailleurs on a:

$$v^2 = u_1^2 - 2\int_{\varrho_1}^{\varrho} F\,d\varrho \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (43)$$

donc:

$$lim\, \varrho^2 v^2 = lim\, \varrho^2 \left(u_1^2 - 2\int_{\varrho_1}^{\varrho} F\,d\varrho\right) = lim \frac{u_1^2 - 2\int_{\varrho_1}^{\varrho} F\,d\varrho}{\varrho^{-2}} \quad . \; (44)$$

A la limite, cette expression devient $\frac{0}{0}$; mais, en différentiant le numérateur et le dénominateur, on trouve immédiatement:

$$lim\, \varrho^2 v^2 = lim \frac{-2F}{-2\varrho^{-3}} = lim\, F\varrho^3 \; . \; . \; . \; . \; (45)$$

V. Applications.

20. I. *Déterminer les différentes formes principales des trajectoires qui peuvent se produire sous l'action d'une force à loi donnée, lorsqu'une particule matérielle part d'un point donné, avec une vitesse donnée, dans des directions différentes.*

On commence par chercher toutes les trajectoires qui se terminent en spirale à cercle asymptotique. A cet effet, il suffit, suivant le théorème VII, de déterminer, sur la trajectoire radiale qui part du même point avec la même vitesse, les points où v_ϱ prend une valeur minimum.

Pour trouver ces points, il faut résoudre l'équation, en général transcendante :

$$A_w = A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

c'est-à-dire :

$$\tfrac{1}{2}\varrho F + \int_{\varrho_0}^{\varrho} F d\varrho = \tfrac{1}{2} v_1^2 + \int_{\varrho^0}^{\varrho_1} F d\varrho \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

Si toutefois le champ a été préalablement divisé en régions de stabilité, d'instabilité et de répulsion, les racines sont déjà séparées. Dans chaque région de stabilité ou d'instabilité il ne peut y avoir, en effet, suivant le *Theorème* II, *Corollaire a*, qu'une seule racine. En outre, on n'a besoin de connaître que les racines situées dans des régions d'instabilité, car celles qui se trouvent dans une région de stabilité conduisent à des valeurs maxima de v_ϱ. Enfin, lorsque la trajectoire radiale ne conduit ni à l'infini ni au centre, mais possède des points terminaux, où la vitesse se renverse, il faut d'emblée rejeter les racines situées au-delà de ces points terminaux.

Pour savoir maintenant si dans une région d'instabilité donnée, sur laquelle passe la trajectoire radiale, il y a une racine, on déterminera la valeur de A_w aux deux limites de la région. Ce n'est que dans le cas où la valeur de A est comprise entre ces deux valeurs de A_w qu'il y a une racine, laquelle peut alors être trouvée par approximation.

Cette recherche peut présenter quelque embarras dans la région d'instabilité extérieure, si celle-ci s'étend jusqu'à l'infini, ou dans l'intérieure, si celle-ci entoure immédiatement le centre. Dans le premier cas on doit déterminer *lim* A_w pour $\varrho = \infty$, dans le second, pour $\varrho = 0$.

La détermination de *lim* A_w pour $\varrho = \infty$ n'offre, lorsque la dernière région est une région d'instabilité, aucune difficulté spéciale, car si *lim* $F\varrho^3$ est finie ou *nulle*, *lim* $F\varrho$ est CERTAINEMENT nulle, et par conséquent :

$$lim\, A_w(\varrho = \infty) = \int_{\varrho_0}^{\infty} F\, d\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Pour $\varrho = 0$, au contraire, et dans une région d'instabilité, *lim* A_w prend en général une forme indéterminée, et alors les remarques suivantes peuvent contribuer beaucoup à abréger les recherches :

1°. *Si lim* $F\varrho^3$ *est infinie, lim* A_w *est également infinie.* On a, en effet, d'après (6):

$$\frac{d\,A_w}{d\varrho} = \frac{1}{2\varrho^2}\,\frac{d\,F\varrho^3}{d\varrho}.$$

En considérant l'accroissement que A_w et $F\varrho^3$ éprouvent quand on se rapproche du centre depuis la distance ϱ_1 jusqu'à une distance plus petite ϱ_2, on a donc:

$$\Delta A_w > \frac{1}{2\varrho_1^2}\,\Delta F\varrho^3 \;, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

d'où il suit immédiatement que lorsque $F\varrho^3$ devient infini, il doit en être de même de A_w.

2°. *Même si* $F\varrho^3$ *tend vers une limite finie*, A_w *deviendra infiniment grand, à moins que lim* $\left(\frac{d\,F\varrho^3}{d\varrho}\right)$ *et lim* $\left(\frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)$ *ne deviennent toutes les deux nulles.*

Lorsque *lim* $F\varrho^3$ est finie, on peut poser:

$$F\varrho^3 = (F\varrho^3)_0 + \varrho\left(\frac{dF\varrho^3}{d\varrho}\right)_0 + \frac{\varrho^2}{1.2}\left(\frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)_0 + \frac{\varrho}{1.2.3}\left(\frac{d^3F\varrho^3}{d\varrho}\right)_0 + .. (50)$$

Mais alors on a :

$$A_w = \tfrac{1}{2}F\varrho + \int_{\varrho_0}^{\varrho} F\,d\varrho = \frac{1}{2\varrho_0^2}(F\varrho^3)_0 + \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right)\left(\frac{dF\varrho^3}{d\varrho}\right)_0 +$$

$$+\frac{1}{4}\left(2 + l\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\right)\left(\frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)_0 + \frac{1}{12}(3\varrho - 2\varrho_0)\left(\frac{d^3F\varrho^3}{d\varrho^3}\right)_0 + . \quad (51)$$

expression qui devient toujours ∞, à moins que les dérivées en question ne s'annulent. C'est donc dans ce cas-là seulement que *lim* A_w demande un calcul plus compliqué.

21. Après avoir déterminé les rayons vecteurs de tous les points de la trajectoire radiale dans lesquels $v\,\varrho$ acquiert des valeurs minima, on calculera ces valeurs elles-mêmes. Ce calcul est beaucoup simplifié par la circonstance que, suivant le *théorème* II, on a, aux points en question, $v = w$, et par conséquent:

$$v\varrho = w\varrho = \sqrt{F\varrho^3}.$$

Conformément au *théorème VII*, on doit maintenant rejeter tous les points pour lesquels $v\varrho > v_1\varrho_1$, ainsi que ceux pour lesquels $v\,\varrho$ prend des valeurs *plus grandes* que la valeur de cette expression dans l'un des autres points situés entre le point considéré et le point de départ.

Autant il reste de points après cette élimination, autant il y aura de trajectoires, partant du point avec la vitesse donnée, qui pourront conduire à une spirale. Les rayons vecteurs des points seront les rayons des cercles asymptotiques de ces spirales.

Soient: ϱ_p le rayon vecteur d'un pareil point, v_p la vitesse pour ce point sur la trajectoire radiale, μ_p l'angle sous lequel la trajectoire spirale correspondante doit quitter le point de départ; on aura, d'après le *théorème VII*:

$$\sin\mu_p = \frac{v_p\,\varrho_p}{v\,\varrho} = \frac{w_p\,\varrho_p}{v\varrho}.$$

De cette manière on peut donc assigner, au point donné, toutes les trajectoires qui, pour la vitesse donnée, se terminent en spirale à cercle asymptotique. Lorsque, pour une trajectoire

quelconque, l'angle de départ se trouve entre les angles de départ de deux trajectoires terminées en spirale à cercle asymptotique, la trajectoire en question doit posséder un apocentre ou un péricentre. Si les trajectoires terminées en spirale sont toutes les deux centripètes ou toutes les deux centrîfuges, on pourra encore resserrer la partie du champ dans laquelle peut se trouver le péricentre ou l'apocentre, en remarquant qu'il ne saurait être situé dans la région d'instabilité appartenant à la moins inclinée des deux trajectoires terminées en spirale.

Il résulte de là que, lorsque la vitesse change graduellement de direction, il s'opère, au passage d'une des directions qui donnent lieu à des trajectoires terminées en spirale, un saut brusque dans la distance de l'apocentre, saut dont l'explication, au point de vue purement mathématique, a été donnée au § 4.

Si l'on veut trouver, pour une trajectoire donnée, le rayon vecteur du péricentre ou de l'apocentre, il suffit de remarquer que ce rayon vecteur est égal à celui du point de la trajectoire radiale dans lequel se réalise pour la première fois — depuis le point de départ — la relation

$$v \varrho = v_1 \varrho_1 \sin \mu_1 \quad [1] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (52)$$

---

1) De cette relation il résulte:

$$\varrho^2 \left(v_1^2 - 2 \int_{\varrho_1}^{\varrho} F \, d\varrho\right) = v_1^2 \varrho_1^2 \sin^2 \mu_1 .$$

C'est l'équation en ϱ, qui sert à déterminer les distances des sommets d'une trajectoire centrale au centre. Naturellement, la solution du problème qui nous occupe se laisserait aussi déduire, par voie purement algébrique, de cette équation.

Des trajectoires à apocentre et péricentre prennent naissance lorsque cette équation a deux racines, entre lesquelles se trouve ϱ_1. S'il n'y a pas de racine entre ϱ_1 et ∞, ni entre ϱ_1 et *zéro*, la trajectoire conduit à l'infini ou au centre.

Des cas intermédiaires se présentent lorsqu'une des racines, entre lesquelles est situé ϱ_1, se confond avec une autre racine. Cela ne peut arriver que pour des valeurs de ces racines qui satisfont á l'équation dérivée;

Pour ce rayon vecteur, en effet, on a dans la trajectoire donnée: $\sin \mu = 1$, donc $\mu = 90°$.

22. Quand on a déterminé ainsi les deux trajectoires les plus inclinées qui conduisent l'une en direction centrifuge et l'autre en direction centripète à des spirales à cercle asymptotique, il ne reste plus qu'à examiner les trajectoires plus inclinées.

Pour ce qui concerne les *trajectoires centrifuges*, la décision est maintenant devenue très facile. *Elle ne dépend que de la question de savoir si la trajectoire radiale conduit à l'infini, en d'autres termes, si la moitié de la force vive suffit à produire le travail nécessaire pour conduire la particule, à travers toutes les régions d'attraction, jusqu'à l'infini.* Lorsque, en effet, cette force vive est *insuffisante* pour ce travail, il doit naturellement y avoir un apocentre. Après que le produit $v\varrho$, dans la trajectoire radiale, aura passé par la dernière valeur minima, il commencera par croître, puis il décroîtra de nouveau et deviendra nul avec la vitesse. Préalablement il sera un instant égal à $v_1 \varrho_1 \sin \mu_1$, et alors la distance apocentrique est atteinte.

Si, au contraire, la force vive est *plus que suffisante*, la trajectoire doit s'étendre à l'infini, car sa vitesse aréolaire est moindre que celle de la trajectoire spirale la plus inclinée, pour laquelle elle est égale à la moitié de la plus petite valeur minima de $v \varrho$ située entre le point de départ et l'infini. On a donc partout:

$$v \varrho \sin \mu = v_1 \varrho_1 \sin \mu_1 < v \varrho$$

$$\sin \mu < 1.$$

$$2 \varrho \int_{\varrho_1}^{\varrho} F d \varrho + F \varrho - v_1^2 = 0,$$

laquelle est identique avec notre équation $A_w = A$. Dans le cas intermédiaire, il se produit en général des spirales à cercle asymptotique.

Si l'on veut entrer dans plus de détails, fixer les limites des racines de l'équation et de sa dérivée, donner des règles pour déterminer lesquelles des racines de la dérivée peuvent réellement conduire à un cas intermédiaire, etc., alors se présentent une à une toutes les difficultés qui, plus haut, ont été vaincues, à ce qu'il me semble, d'une manière plus représentative.

Il y a un peu plus de difficulté à décider entre les deux possibilités lorsque la force vive est *tout juste suffisante.* Dans ce cas, en effet, la valeur limite de $v\varrho$ prend une forme indéterminée. Mais ici le *theorème XII* nous vient en aide pour trouver cette valeur limite. Si cette valeur limite $\sqrt{F\varrho^3}$ est *plus grande* que la plus petite valeur minimum de $v\varrho$ entre le point de départ et l'infini, ou, s'il n'existe pas de valeur minimum plus petite que $v_1\,\varrho_1$, plus grande que $v_1\,\varrho_1$, alors toutes les trajectoires plus inclinées que la plus inclinée des trajectoires centrifuges terminées en spirale à cercle asymptotique, ou, en l'absence de ces dernières, toutes les trajectoires conduisent à l'infini.

Si la valeur limite $\sqrt{F\varrho^3}$ est, au contraire, *plus petite* que $v_1\,\varrho_1$, et plus petite que la plus petite valeur minimum, il existe un nouvel angle limite μ_p, déterminé par

$$sin\,\mu_p = \frac{\sqrt{F\varrho^3}}{v_1\,\varrho_1},$$

de sorte que toutes les trajectoires plus inclinées, de même que la trajectoire partant sous cet angle même, conduisent à l'infini, tandis que toutes les trajectoires moins inclinées possèdent un apocentre entre l'infini et la limite extérieure de la région d'instabilité de la plus inclinée des trajectoires en spirale à cercle asymptotique. La trajectoire qui part sous l'angle limite même présente la particularité de tendre de plus en plus à devenir normale au rayon vecteur. Les autres trajectoires qui atteignent l'infini ont également besoin d'un nombre infini de circonvolutions pour y arriver, mais, chez elles, l'angle du rayon vecteur et de la trajectoire tend vers une limite différente.

23. En ce qui concerne les *trajectoires centripètes* plus inclinées que la plus inclinée des trajectoires centripètes terminées en spirale à cercle asymptotique, pour décider si elles atteindront ou non le centre, *on déterminera d'abord lim* $\sqrt{F\varrho^3}$ pour $\varrho = 0$. *Si cette limite est zéro*, toutes les trajectoires en question possèdent, suivant le théorème X_a, un péricentre. Il en est de même lorsque le centre est entouré d'une région de répulsion et que la limite, par conséquent, devient imaginaire.

Si lim $\sqrt{F\varrho^3}$ *est, au contraire, infiniment grande, ou du moins plus grande que* $v_1\varrho_1$ *ou plus grande que la plus petite valeur minimum de* $v\varrho$ *située entre le point de départ et le centre*, alors toutes ces trajectoires conduisent au centre; à condition, toutefois, que la trajectoire radiale y conduise, ce qui pourrait être empêché par la présence d'une région de répulsion. Dans ce dernier cas, naturellement, toutes les trajectoires possèdent de nouveau un péricentre.

Un examen ultérieur n'est donc nécessaire que dans le cas où *lim* $\sqrt{F\varrho^3} = \alpha$ est finie, plus petite que $v_1\varrho_1$ et plus petite que la plus petite valeur minimum de $v\varrho$ dans la direction du centre.

Il existe alors un nouvel angle limite:

$$sin\,\mu_p = \frac{\sqrt{F\varrho^3}}{v_1\,\varrho_1},$$

de sorte que les trajectoires plus inclinées passent par le centre, et que les trajectoires moins inclinées possèdent un apocentre.

Le cas limite a été étudié à fond au § 16, auquel nous renvoyons.

II. 24. *Déterminer les différentes formes principales des trajectoires décrites sous l'action d'une force attractive* $F = f\varrho^n$, *et les conditions dans lesquelles ces formes apparaissent.*

Premier cas: $n \geqq -1$.

Outre les trajectoires radiales et circulaires, que nous laisserons tacitement de côté dans ce qui suit, il ne peut exister qu'*une seule* espèce de trajectoires, savoir, des *trajectoires possédant à la fois un apocentre et un péricentre.* En effet, le travail nécessaire pour atteindre l'infini est infiniment grand: donc il n'y a jamais de branches infinies. *Lim* $F\varrho^3$ est *zéro*: donc le centre n'est jamais atteint.

Deuxième cas. $-1 > n > 3$.

Il y a *deux* espèces de trajectoires. *La première espèce possède un apocentre et un péricentre.* Elle apparaît lorsque

$v_1 < \sqrt{\frac{2f}{-n-1}\varrho_1^{n+1}}$; alors, en effet, la force vive est insuffisante à fournir le travail nécessaire pour atteindre l'infini.

La seconde espèce possède des branches infinies et un péricentre. Elle se forme toujours lorsque $v_1 \geqq \sqrt{\frac{2f}{-n-1}\varrho_1^{n \cdot 1}}$, ainsi qu'il résulte du *Théorème XI*, *Corollaire a.*

Troisième cas: $n = -3$.

Il y a *trois* espèces de trajectoires. *La première espèce passe par le centre et possède un apocentre.* Elle naît lorsque $v_1 < w_1 = \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1}$. En effet, d'après le *Théorème I*, *Corollaire h*, la trajectoire doit alors conduire, en direction centripète, jusqu'au centre; en outre, elle ne peut avoir de branches infinies, parce que la force vive est insuffisante. *La seconde espèce possède une branche infinie et conduit au centre.* Elle se produit lorsqu'on a simultanément $v_1 \geqq w_1 = \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1}$ et $\sin \mu_1 \leqq \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1 v_1}$. En effet, d'après le *Théorème I*, *Corollaire g*, il doit alors apparaître en direction centrifuge une branche infinie, tandis que, par application du § 21, on trouve immédiatement que le centre devra être atteint. Cette seconde espèce comprend les trajectoires en forme de spirales logarithmiques, qui naissent lorsque $v_1 = w_1 = \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1}$ (Voir *Théorème III*, *Corollaire e*).

La troisième espèce possède un péricentre et deux branches infinies. Elle se produit lorsqu'on a $v_1 > w_1 = \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1}$ et simultanément $\sin \mu_1 > \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1 v_1}$.

Quatrième cas: $d < -3$.

Il y a *cinq* espèces de trajectoires. *La première espèce passe par le centre et possède un apocentre.* Elle se forme *toujours*

lorsque $v_1 < \sqrt{\frac{2f}{-n-1}\varrho_T^{\,n+1}}$; dans ce cas, en effet, il ne peut apparaître de branche infinie, la force vive étant insuffisante; en outre, on a alors $v_1 < w_1 = \sqrt{f\varrho^{n+1}}$, de sorte que, d'après le *Théorème I*, *Corollaire h*, la trajectoire doit conduire, en direction centripète, jusqu'au centre. Elle ne se forme *jamais* lorsque $v_1 > w_1 = \sqrt{f\varrho_1{}^{n+1}}$, car alors la trajectoire, en vertu du *Théorème I*, *Corollaire g*, se prolonge jusqu'à l'infini. Si v_1 est situé entre ces deux limites, on pourra assigner un angle limite μ', tel que la trajectoire qui part en direction centrifuge sous cet angle se termine en spirale à cercle asymptotique, et que toute trajectoire plus inclinée conduit à l'infini, toute trajectoire moins inclinée à un apocentre. Pour obtenir cet angle limite, on déduira de l'équation (47) la valeur du rayon vecteur pour lequel $v\varrho$ devient minimum; on trouve:

$$\varrho = \left(\frac{-n-1}{-n-3}\cdot\frac{v_1^2}{f} - \frac{2}{-n-3}\varrho_1{}^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Pour la valeur $v\varrho$ elle-même, qui correspond à ce rayon vecteur, on trouve:

$$v\varrho = \sqrt{F\varrho^3} = \sqrt{f}\cdot\left(\frac{-n-1}{-n-3}\frac{v_1^2}{f} - \frac{2}{-n-3}\varrho_1{}^{n+1}\right)^{\frac{n+3}{2(n+1)}},$$

et par conséquent pour l'angle limite

$$\sin\mu' = \frac{\sqrt{f}\cdot\left(\frac{-n-1}{-n-3}\frac{v_1^2}{f} - \frac{2\varrho_1{}^{n+1}}{-n-3}\right)^{\frac{n+1}{2(n+3)}}}{v_1\varrho_1}.$$

La seconde espèce passe par le centre et se termine en spirale à cercle asymptotique extérieur. Elle se produit dès que $v_1 < w_1 = \sqrt{f\varrho^{n+1}}$ et $\mu_1 = \mu'$.

La troisième espèce passe par le centre et possède une branche infinie. Elle se produit, comme nous l'avons vu, dès qu'on a

$v_1 < w_1 = \sqrt{f \varrho_1^{\,n+1}}$ mais $> \sqrt{\frac{2f}{-n-1} \varrho_1^{\,n+1}}$ et en outre $\mu_1 < \mu'$. Elle peut, toutefois, apparaître aussi lorsque $v_1 \gtreqless w_1 = \sqrt{f \varrho_1^{\,n+1}}$. Dans ce cas, la trajectoire, en direction centrifuge, possède toujours une branche infinie, conformément au *Théorème I*, *Corollaire g*. Lorsque $v_1 = w_1 = \sqrt{f \varrho_1^{\,n+1}}$, la branche centripète conduit, en vertu du *Théorème I*, *Corollaire h*, au centre, et il se forme donc une trajectoire de la troisième espèce. Lorsque $v_1 > w_1 = \sqrt{f \varrho_1^{\,n+1}}$, on peut de nouveau assigner un angle limite μ^1, pour lequel vaut la formule développée ci-dessus, et tel que la trajectoire partant sous cet angle se termine en spirale à cercle asymptotique intérieur. Toute trajectoire moins inclinée possède alors un péricentre, toute trajectoire plus inclinée conduit au centre et est donc de la troisième espèce.

La quatrième espèce possède une branche infinie et se termine en spirale à cercle asymptotique intérieur. Elle se produit lorsqu'on a $v_1 > w_1 = \sqrt{f \varrho_1^{\,n+1}}$ et, en outre, $\mu_1 = \mu'$.

La cinquième espèce possède un péricentre et deux branches infinies. Elle se forme lorsque: $v_1 > w_1 = \sqrt{f \varrho_1^{\,n+1}}$ et, en outre, $\mu_1 > \mu'$.

III. 23. *Déterminer la nature et les limites des régions qui se forment dans le plan d'un anneau homogène de matière, qui attire suivant la loi de la gravitation universelle.*

Il m'a paru utile de traiter ce problème, afin de faire voir que la gravitation universelle peut donner lieu à la production de régions d'instabilité.

Il va sans dire que l'attraction qui émane d'un pareil anneau peut être conçue comme une force centrale, ayant pour centre le centre de l'anneau. Désignons par M la masse de l'anneau et par R son rayon, prenons pour unité de force la constante de la gravitation universelle, et introduisons les intégrales elliptiques complètes:

$$\omega(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - sin^2\theta sin^2\varphi}}; \quad \vartheta(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi.\sqrt{1 - sin^2\theta sin^2\varphi}.$$

Posons, en outre: $\varrho = R \cot^2 \frac{1}{2}\theta$; le potentiel V de la force attractive, en un point extérieur à l'anneau, devient alors:

$$V = \frac{2 M \sin^2 \frac{1}{2}\theta}{\pi R} \omega(\theta).$$

De là, en différentiant par rapport à ϱ et en appliquant la formule:

$$\omega'(\theta) = -\cot\theta \,.\, \omega(\theta) + \frac{1}{\sin\theta \cos\theta} \vartheta(\theta),$$

on déduit aisément:

$$F = \frac{M \,.\, \sin^4 \frac{1}{2}\theta}{\pi R^2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta} \left[\omega(\theta) + \frac{\vartheta(\theta)}{\cos\theta}\right].$$

Pour la distance ϱ_0, à laquelle l'énergie potentielle est supposée égale à *zéro*, nous prenons la valeur infiniment grande; l'énergie totale d'une particule matérielle, qui décrit une trajectoire déterminée, est alors:

$$A = \tfrac{1}{2} v^2 - 2\int_{\varrho}^{\infty} F d\varrho = \tfrac{1}{2} v^2 - \frac{2 M \,.\, \sin^2 \frac{1}{2}\theta}{\pi R} \,.\, \omega(\theta).$$

On a en outre:

$$w^2 = \varrho F = \frac{M \,.\, \sin^2 \frac{1}{2}\theta}{\pi R} \left[\omega(\theta) + \frac{\vartheta(\theta)}{\cos\theta}\right],$$

d'où il suit:

$$A_w = \frac{M \,.\, \sin^2 \frac{1}{2}\theta}{\pi R} \left[-3\,\omega(\theta) + \frac{\vartheta(\theta)}{\cos\theta}\right]$$

$$B_w^2 = \varrho^2 w^2 = \frac{M \,.\, \cos^4 \frac{1}{2}\theta}{\pi \sin^2 \frac{1}{2}\theta} \left[\omega(\theta) + \frac{\vartheta(\theta)}{\cos\theta}\right].$$

A l'intérieur de l'anneau il y a naturellement une région de répulsion. En dehors et tout près de l'anneau, A_w devient très grand, et même, *sur* l'anneau, infiniment grand, ce dont il est facile de se convaincre en laissant θ s'approcher de la limite 90°. Ensuite, A_w décroît lorsque ϱ croît. L'anneau est donc entouré d'une *région d'instabilité*. A celle-ci doit toutefois succéder une *région de stabilité*, car la loi d'attraction tend vers la limite $F = \frac{M}{\varrho^2}$, laquelle loi limite fournit une région de stabilité. La

démarcation entre les deux régions se trouve là où:

$$\frac{d \,.\, A_w}{d\varrho} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{sin^3 \frac{1}{2}\theta}{cos \frac{1}{2}\theta} \cdot \frac{d A_w}{d\theta} = 0.$$

En appliquant la formule:

$$\vartheta'(\theta) = cot\,\theta\,(\vartheta(\theta) - \omega(\theta))$$

on trouve, après exécution des différentiations, que, pour déterminer cette démarcation, il faut résoudre l'équation:

$$\omega(\theta) = \frac{sin^4 \frac{1}{2}\theta}{cos^2 \theta} \,.\, \vartheta(\theta).$$

On obtient ainsi:

$$\theta = 76^\circ\, 29'\, 30''$$
$$\varrho = 1{,}609^5\, R.$$

Par conséquent, l'anneau matériel est entouré jusqu'à la distance

$$R_1 = 1{,}609^5\, R$$

d'une région d'instabilité, région dans laquelle peuvent donc se présenter, sous l'action de la gravitation universelle, des spirales à cercle asymptotique, et des trajectoires circulaires instables.

Sur le cercle de démarcation entre la région de stabilité et la région d'instabilité on a:

$$A_w = -\,0{,}7742\, \frac{M}{\pi R},$$

où le signe négatif indique que la force vive du mouvement circulaire serait insuffisante pour fournir le travail nécessaire au transport à l'infini. Plus près de l'anneau, toutefois, A_w croît et devient finalement positif, de sorte qu'on obtient alors des trajectoires circulaires, qui sont parcourues avec des vitesses si grandes que la force vive suffirait, et au-delà, pour exécuter ce travail.

Cela a lieu dès que:

$$A_w > 0,$$

ce qui exige:

$$\theta > 84^\circ\, 55'\, 30''$$
$$\varrho < 1{,}194\; R.$$

AMSTERDAM, Mars 1884.

QUELQUES REMARQUES

SUR LA

VARIATION DE LA DENSITÉ DANS L'INTÉRIEUR DE LA TERRE.

PAR

M. T. J. STIELTJES.

Introduction.

1. Considérons la terre comme formée de couches ellipsoïdales, telles que la densité f soit constante dans l'étendue de chacune d'elles. Une de ces couches sera déterminée par le rayon x de la sphère équivalente et nous supposerons qu'à la surface on ait $x=1$.

Il suit de ces notations que le volume de la terre est $\frac{4}{3}\pi$, sa masse est $4\pi\int_0^1 x^2 f(x)dx$. Donc la densité moyenne $\Delta=3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx$.

Dans ce qui suit, je suppose connu Δ, ainsi que le rapport

$$\lambda=\frac{\int_0^1 x^2 f(x)\,dx}{\int_0^1 x^4 f(x)\,dx},$$

dont on peut obtenir la valeur en combinant les observations astronomiques avec celles qui servent à faire connaître la figure de la terre.

Enfin, comme dernière donnée, je prendrai la valeur de la densité à la surface : $f(1)=d$.

Dans ces conditions mon but est de limiter, autant que possible, la marche de la fonction inconnue $f(x)$. Cela n'est possible qu'à l'aide de certaines hypothèses: les deux suivantes seront discutées successivement.

I. La densité va continuellement en croissant de la surface jusqu'au centre de la terre.

II. La densité va continuellement en croissant de la surface jusqu'au centre, mais la rapidité de cet accroissement va en diminuant de la surface jusqu'au centre.

Enfin, dans une troisième partie, je considérerai brièvement la mise en nombres des résultats obtenus, et j'ajouterai une discussion de différentes formules qu'on a proposées pour représenter la densité dans l'intérieur de la terre.

Mais, avant d'entrer en matière, voici quelques remarques préliminaires qui se rapportent également à la discussion des deux hypothèses.

D'abord il convient d'introduire au lieu de Δ et λ les intégrales:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx\,,$$

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad B = \int_0^1 x^4 f(x)\, dx\,,$$

en sorte qu'on a $A = \frac{\Delta}{3}$, $B = \frac{\Delta}{3\lambda}$.

Ensuite, démontrons la proposition suivante:

„*Lorsque deux fonctions* $F(x)$, $G(x)$ vérifient les équations:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \int_0^1 x^2\, F(x)\, dx = A\,, \int_0^1 x^4\, F(x)\, dx = B\,,$$

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \int_0^1 x^2\, G(x)\, dx = A\,, \int_0^1 x^4\, G(x)\, dx = B\,,$$

alors la différence $F(x) - G(x)$, *si elle n'est pas constamment égale à zéro, doit changer au moins* DEUX *fois de signe dans l'intervalle de zéro à l'unité*".

En effet les équations (3) et (4) donnent:

$$(5) \ldots\ldots \int_0^1 x^2 \Big[F(x) - G(x)\Big] dx = 0,$$

$$(6) \ldots\ldots \int_0^1 x^4 \Big[F(x) - G(x)\Big] dx = 0,$$

d'où il est évident que $F(x) - G(x)$ doit changer de signe au moins une fois.

Mais supposons que $F(x) - G(x)$ change *seulement* une fois de signe, et que par conséquent $F(x) - G(x)$ ait un signe déterminé pour les valeurs

$$o < x < b$$

et de même un signe déterminé, mais contraire au précédent, pour les valeurs

$$b < x < 1,$$

b étant comprise entre zéro et l'unité.

Posons:

$$F(x) - G(x) = \varphi(x) \qquad 0 < x < b$$
$$G(x) - F(x) = \psi(x) \qquad b < x < 1,$$

alors $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ne changent pas de signe et ont même signe.

Or on devra avoir d'après (5) et (6):

$$\int_0^b x^2 \varphi(x)\, dx = \int_b^1 x^2 \psi(x)\, dx,$$

$$\int_0^b x^4 \varphi(v)\, dx = \int_b^1 x^4 \psi(x)\, dx,$$

d'où l'on tire:

$$\int_0^b x^2 (b^2 - x^2) \varphi(x)\, dx = \int_b^1 x^2 (b^2 - x^2) \psi(x)\, dx,$$

équation absurde parce que les deux membres sont évidemment de signe contraire.

La proposition que nous venons de démontrer sera d'un usage continuel et l'on verra qu'à peu près tout ce qui suit en dépend.

Première partie.

Discusion de l'hypothèse I.

2. Nous allons donc supposer maintenant que $f(x)$ est une fonction décroissante.

Il convient d'observer d'abord que cela entraîne nécessairement entre nos données A, B, d l'inégalité:

(7) . . . . , $3A > 5B > d.$

L'inégalité $5B > d$ résulte immédiatement de la signification de ces quantités, et l'on démontre encore facilement, de diverses manières, que $3A > 5B$. Mais, pour faire connaître dès à présent la nature de la méthode dont je ferai un usage continuel dans la suite, je tirerai ici cette inégalité de la proposition du N°. 1.

J'observe pour cela qu'on peut déterminer les constantes p, q de l'expression $F(x) = p - qx$ de manière qu'elle satisfasse aux équations (3). On trouve ainsi:

$$F(x) = 30A - 45B - 12(3A - 5B)x,$$

et comme la densité $f(x)$ satisfait aux équations (1) et (2), la différence $F(x) - f(x)$ doit changer au moins deux fois de signe d'après notre proposition. Or cela serait manifestement impossible si l'on avait $3A \leqq 5B$, parce qu'alors $F(x)$ serait croissant ou du moins non décroissant et ainsi $F(x) - f(x)$ varierait toujours dans le même sens. On doit donc avoir $3A > 5B$.

A la rigueur on pourrait avoir $3A = 5B$, mais alors $f(x)$ serait nécessairement constant et $5B = d$. Nous ferons abstraction de ce cas, parce que pour la terre les inégalités (7) ont lieu effectivement.

3. *Limite inférieure m de la densité au centre.*

Tâchons de déterminer une loi de densité de la manière suivante:

$$f(x) = m \quad \text{de } x = 0 \text{ jusqu'à } x = a < 1$$
$$f(x) = d \quad \text{de } x = a \text{ jusqu'à } x = 1.$$

Les inconnues m et a doivent être trouvées par les conditions (1) et (2); — on obtient après une légère réduction:

$$3A - d = (m - d)\,a^3$$
$$5B - d = (m - d)\,a^5\,,$$

d'où

(8) . . . . $a = \sqrt{\dfrac{5B - d}{3A - d}}$

(9) . . . . $m = d + \sqrt{\dfrac{(3A - d)^5}{(5B - d)^3}}.$

Comme on le voit par les inégalités (7), la valeur de a est inférieure à l'unité; quant à $m = d + \dfrac{3A - d}{a^3}$, à cause de $a < 1$ il vient $m > 3A$, c'est-à-dire m est supérieur à la densité moyenne de la terre, — ce qui est évident à priori.

En prenant (fig. 1) un système d'axes rectangulaires OX, OY, $OA = 1$, $OD = m$, $AB = d$, $OF = a$, cette loi de densité est représentée par les deux droites DE, CB. Or il est évident maintenant que m est la densité minima au centre, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune loi de densité qui donne pour $x=0$ une densité inférieure à m. En effet, désignons par $f(x)$ la loi de densité représentée par DE, CB, et par $f_1(x)$ une autre loi de densité, qui donnerait au centre une densité inférieure à m; on voit aussitôt que $f(x) - f_1(x)$ ne pourrait présenter qu'un seul changement de signe, ce qui est impossible d'après la proposition du N°. 1.

4. Dans la suite, la limite inférieure de la densité pour $x = b$ sera désignée par $t(b)$ et la limite supérieure de cette même densité par $T(b)$. Le résultat que nous venons d'obtenir s'exprime donc ainsi: $t(0) = m$, tandis qu'on a évidemment $t(1) = d$, $T(1) = d$.

Nous nous proposons de déterminer ces fonctions $t(b)$, $T(b)$ pour une valeur quelconque de b.

D'abord il est évident, en jetant un regard sur la fig. 1, que

$$t(b) = d \qquad a \leqq b \leqq 1,$$

et à l'aide d'un raisonnement, tout-à-fait analogue à celui qui nous a fait voir que $t(o) = m$, on se convainc que

$$T(a) = m.$$

La fonction $t(b)$ étant connue maintenant pour les valeurs de b comprises entre a et l'unité, il reste seulement à trouver la valeur de $t(b)$ pour les valeurs positives de b inférieures à a. (Nous savons déjà que $t(o) = m$).

Pour cela, je cherche une fonction $F(x)$, ainsi:

$$\begin{array}{ll} F(x) = K & o < x < b \\ F(x) = k & b < x < 1, \end{array}$$

K et k étant des constantes qui doivent être déterminées par les conditions (3). Un calcul facile donne:

$$K = \frac{3(1-b^5)A - 5(1-b^3)B}{b^3(1-b^2)},$$

$$k = \frac{5B - 3b^2 A}{1 - b^2}.$$

La valeur de k, considérée comme fonction de b, est décroissante, et comme on voit facilement que pour $b = a$ il vient $k = d$, la valeur de k sera supérieure à d dans l'hypothèse actuelle $o < b < a$. D'après la proposition du N° 1 on en conclut $K > m$. Dans la fig. 1 la fonction $F(x)$ est représentée par les droites IK, HG et $OL = b$.

On voit maintenant, d'après un raisonnement déjà développé plus d'une fois, qu'il ne peut exister une loi de densité qui donne pour $x = b$ une densité inférieure à k ou supérieure à K; donc $t(b) \geqq k$, $T(b) \leqq K$.

La fonction $F(x)$ n'est pas, à proprement parler, une fonction

qui puisse être assimilée à la densité, parce qu'on a $T(1) = k > d$. Mais on peut se figurer une loi de densité qui diffère très peu de $F(x)$ dans tout l'intervalle de zéro à l'unité et qui présente seulement dans le voisinage de la surface un changement extrêmement rapide de k à d.

D'après cette remarque, on doit avoir: $t(b) = k$, $T(b) = K$,

c.à.d.: $t(b) = \dfrac{5B - 3b^2 A}{1 - b^2}$, $T(b) = \dfrac{3(1 - b^5)A - 5(1 - b^3)B}{b^3(1 - b^2)}$,

sous la condition $o < b \leqq a$.

La fonction $t(b)$ est maintenant parfaitement connue. Remarquons qu'elle présente une discontinuité; en effet, ε étant infiniment petit, on a

$$t(\varepsilon) = 5B < 3A$$

et

$$t(o) = m > 3A.$$

Cette singularité s'explique très bien si l'on fait attention à la grande différence qui existe entre les deux lois de densité qui donnent la densité minima au centre et la densité minima dans un point voisin du centre.

5. Il reste à déterminer $T(b)$ pour les valeurs de b comprises entre a et 1. J'observe pour cela que:

$$B = \int_0^b x^4 f(x)\,dx + \int_b^1 x^4 f(x)\,dx,$$

donc

$$B \geqq f(b)\int_0^b x^4\,dx + f(1)\int_b^1 x^4\,dx \qquad \text{c. à. d.:}$$

$$B \geqq \tfrac{1}{5} b^5 f(b) + \frac{1 - b^5}{5} d,$$

par conséquent

$$f(b) \leqq \frac{5B - (1 - b^5)d}{b^5}.$$

Il est évident par là qu'on doit avoir aussi:

$$(10) \ldots\ldots\ldots \quad T(b) \leqq \frac{5B - (1 - b^5)d}{b^5}.$$

C'est une simple limitation de $T(b)$, qu'on pourrait facilement vérifier dans l'intervalle $o < b \leqq a$ où nous connaissons déjà la valeur exacte de $T(b)$. On voit aussi que pour $b = a$ il faut mettre le signe $=$ dans la relation (10).

Mais je dis maintenant qu'on a pour toute valeur de b comprise entre a et 1:

$$T(b) = \frac{5B - (1 - b^5)d}{b^5}.$$

Pour le démontrer en toute rigueur, il faudrait faire voir que, R étant une quantité inférieure à $\frac{5B - (1 - b^5)d}{b^5}$ mais en différant aussi peu qu'on le veut, il existe toujours une loi de densité telle que $f(b) = R$. Mais il me semble que l'indication suivante suffit.

Soit

$$\varphi(x) = \frac{5B - (1 - b^5)d}{b} \qquad o \leqq x \leqq b$$

$$\varphi(x) = d \qquad b \leqq x \leqq 1,$$

on vérifie sans peine que

$$\int_0^1 x^4 \varphi(x)\, dx = B.$$

En désignant par A' la valeur de l'intégrale $\int_0^1 x^2 \varphi(x)\, dx$, on trouve:

$$A' = \frac{5B - d + b^2 d}{3 b^2}.$$

Considérée comme fonction de b, A' est décroissante, et pour $b = a$, $A' = A$; donc, dans la supposition $a < b < 1$, A' est inférieure à A.

La fonction $\varphi(x)$ ne satisfait donc pas aux conditions imposées à la densité, mais en posant:

$$f(x) = \varphi(x), \qquad \varepsilon < x < 1$$

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{A - A'}{\varepsilon\, x^2}, \; o < x < \varepsilon,$$

ε étant une quantité aussi petite qu'on voudra, il vient:

$$\int_0^1 x^2 f(x)\, dx = A' + \int_0^\varepsilon \frac{A - A'}{\varepsilon}\, dx = A$$

$$\int_0^1 x^4 f(x)\, dx = B + \int_0^\varepsilon \frac{A - A'}{\varepsilon}\, x^2\, dx = B + \tfrac{1}{3}\,(A - A')\,\varepsilon^2.$$

En prenant ε infiniment petit, la fonction $f(x)$ satisfait donc bien aux conditions imposées à la densité et l'on a $f(b) = \dfrac{5\,B - (1 - b^5)\,d}{b^5}$.

D'une manière sommaire, mais peu exacte, on pourrait dire que, pour avoir la plus grande densité pour $x = b > a$, il faut se figurer comme condensée dans le centre de la terre une partie finie de la masse totale de la terre. Cette partie de la masse a alors une influence appréciable dans l'intégrale $\int_0^1 x^2\, f(x)\, dx$, mais elle ne change en rien la valeur de $\int_0^1 x^4 f(x)\, dx$, à cause du facteur x^4.

En réunissant les résultats obtenus, on a les formules suivantes:

$$(11)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} t(o) = m & \\ t(b) = \dfrac{5\,B - 3\,b^2\,A}{1 - b^2} & o < b \leqq a \\ t(b) = d & a \leqq b \leqq 1 \end{cases}$$

$$(12)\dots\quad \begin{cases} T(b) = \dfrac{3(1-b^5)A - 5(1-b^3)B}{b^3(1-b^2)} & o < b \leqq a \\ T(b) = \dfrac{5B-(1-b^5)d}{b^5} & a \leqq b < 1 \\ T(1) = d. \end{cases}$$

La fonction $T(b)$ présente une discontinuité; en effet, ε étant infiniment petit, on a:

$$T(1-\varepsilon) = 5B > d$$
$$T(1) = d.$$

DEUXIÈME PARTIE.

Discussion de l'hypothèse II.

6. Dans ce qui suit, nous admettrons:

1° que la fonction $f(x)$ ne croît jamais avec x.

2° que la fonction $\dfrac{df(x)}{dx}$ ne croît jamais avec x.

Quant à cette seconde condition, elle semble exiger l'existence de la fonction dérivée $\dfrac{df(x)}{dx}$; pour cette raison, il vaut mieux l'énoncer un peu autrement, en disant que, sous la condition

$$o \leqq x < y < z \leqq 1,$$

on doit avoir toujours:

$$(13)\dots\dots\quad \frac{f(x)-f(y)}{y-x} \leqq \frac{f(y)-f(z)}{z-y}.$$

Notons une différence profonde qui existe entre notre hypothèse actuelle et celle que nous venons de discuter. Dans la première hypothèse, la fonction $f(x)$ peut avoir un saut brusque pour une valeur quelconque de x; on voit facilement que cela n'est plus possible maintenant, à cause de la condition (13), que pour la seule valeur $x=1$.

Voyons d'abord quelles relations l'hypothèse actuelle entraîne entre les données A, B, d.

Naturellement, on a comme auparavant, $3A > 5B > d$, mais il existe encore une autre relation, propre à notre hypothèse. Pour la trouver, considérons la fonction $F(x)$, qui s'est présentée déjà dans le N°. 2:

$$F(x) = 30A - 45B - 12(3A - 5B)x$$

et qui vérifie les relations:

$$\int_0^1 x^2 \, F(x)\,dx = A, \int_0^1 x^4 \, F(x)\,dx = B.$$

Cette fonction $F(x)$ décroît de $M = F(o) = 30A - 45B$ jusqu'à $D = F(1) = 15B - 6A$.

Je dis maintenant que la valeur $d = f(1)$ doit être inférieure à $D = 15B - 6A$. C'est ce qu'on voit facilement en jetant le regard sur la fig. 2, où la fonction $F(x)$ est représentée par la droite FE, et en se rappelant que la différence $F(x) - f(x)$ doit changer au moins deux fois de signe d'après la proposition du N°. 1. Cela se fonde sur la notion qu'on a d'une courbe qui tourne sa concavité vers OA, car c'est par une telle courbe qu'est représentée la fonction $f(x)$ d'après notre hypothèse. Mais voici une démonstration arithmétique. Supposons $d > D$, alors $F(x) - f(x)$ est négative pour $x = 1$, et comme cette différence doit changer au moins deux fois de signe, il doit exister un nombre $a < 1$ tel que $F(a) - f(a) > 0$, et un nombre $b < a$ tel que $F(b) - f(b) < 0$, donc:

$$F(1) < f(1),$$
$$F(a) > f(a),$$
$$F(b) < f(b),$$

d'où l'on tire:

$$\frac{F(a) - F(1)}{1 - a} > \frac{f(a) - f(1)}{1 - a}, \quad \frac{F(b) - F(a)}{a - b} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

mais évidemment $\dfrac{F(a) - F(1)}{1 - a} = \dfrac{F(b) - F(a)}{a - b}$, donc:

$$\frac{f(b)-f(a)}{a-b} > \frac{f(a)-f(1)}{1-a},$$

ce qui est en contradiction avec la relation (13), en posant, comme il est permis de le faire, $x=b$, $y=a$, $z=1$. La supposition $d > D$ ne peut être admise, et nous pouvons noter les conditions:

$$(14) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} 3A > 5B > d, \\ 15B - 6A > d. \end{cases}$$

On voit encore que, si l'on avait $15B - 5A = d$, la fonction $f(x)$ serait parfaitement définie et devrait être identique à $F(x)$; nous ferons abstraction de ce cas, qui ne se présente pas dans la nature. [1])

Nous allons nous occuper maintenant du même problème qui a déjà été resolu dans notre première hypothèse — c.à.d. nous allons chercher la limite supérieure $T(b)$ et la limite inférieure $t(b)$ de la densité pour $x=b$.

7. Considérons d'abord les valeurs particulières $T(0)$, $t(0)$. La fig. 2 fait voir immédiatement que $T(0)$ n'est autre chose que la valeur de la fonction $F(x)$, considérée dans le N°. précédent pour $x=0$, donc:

$$(15) \ldots\ldots\ldots \quad T(0) = M = 30A - 45B.$$

Quant à la valeur de $t(0)$, que nous désignerons par m, on voit sans peine qu'elle correspond à la loi de densité suivante: une densité constante m de $x=0$ jusqu'à une certaine valeur $x=a<1$, représentée dans la fig. 2 par la droite horizontale $C\,D$, et pour $x>a$ un décroissement régulier de la densité jusqu'à la valeur d représentée par la droite DB; donc:

$$f(x) = m \qquad 0 < x < a$$

$$f(x) = m - \frac{m-d}{1-a}(x-a) \qquad a < x < 1.$$

---

[1]) En introduisant Δ et λ au lieu de A et B, la limitation $15B - 6A > d$ peut se mettre sous la forme $\lambda < \frac{5\nabla}{2\Delta+d}$. Adoptant les valeurs $\Delta = 5{,}56$ et $d = 2.6$, il vient $\lambda < 2.026$, tandis qu'on a $\lambda = 1.87$, avec une erreur que j'estime ne pouvoir dépasser notablement 0.06.

Mais il faut faire voir qu'on obtient une détermination convenable des deux inconnues m et a par les équations (1) et (2). Or on obtient après quelques réductions qui se présentent d'elles-mêmes :

$$12\,A - 4\,d = (1 + a)(1 + a^2)(m - d),$$
$$30\,B - 6\,d = (1 + a)(1 + a^2 + a^4(m - d),$$

d'où, pour la détermination de a:

$$(16) \ldots \frac{1 + a^2 + a^4}{1 + a^2} = \frac{15\,B - 3\,d}{6\,A - 2\,d} = \frac{3\,(5\,B - d)}{2\,(3\,A - d)}.$$

Le membre tout connu est supérieur à l'unité mais inférieur à $\frac{3}{2}$ d'après les inégalités (14), tandis qu'on voit facilement que l'expression $\frac{1 + a^2 + a^4}{1 + a^2}$ varie de 1 à $\frac{3}{2}$, en croissant constamment, quand a varie de 0 à 1. Donc l'équation (16) détermine une valeur unique de a, comprise entre 0 et 1.

Après avoir calculé a, on trouve m à l'aide de:

$$(17) \ldots\ldots\ m = d + \frac{12\,A - 4\,d}{(1 + a)(1 + a^2)},$$

et à cause de $a < 1$ on voit que $m > 3\,A$, c.à.d. m est supérieur à la densité moyenne de la terre, ce qui est évident à priori.

8. Voici maintenant comment on obtient la valeur de $T(b)$ pour une valeur quelconque de b. Supposons d'abord b comprise entre zéro et la valeur a déterminée dans le N°. précédent.

Soit:

$$F(x) = K \qquad 0 < x < b$$
$$F(x) = K - h\,(x - b) \qquad b < x < 1$$

et déterminons les constantes K, h par les conditions (3).

On obtient:

$$K = \frac{6\,(5 - 6\,b + b^6)\,A - 15\,(3 - 4\,b + b^4)\,B}{1 - 3\,b^4 + 2\,b^6}$$

$$h = \frac{36\,A - 60\,B}{1 - 3\,b^4 + 2\,b^6}.$$

Dans la fig. 2 cette fonction $F(x)$ est représentée par la ligne brisée HIG, et l'on trouve

$$F(1) = AG = \frac{15(1+b^2)B - 6(1+b^2+b^4)A}{1+b^2-2b^4}.$$

Comme on voit, h est positif et croît avec b. Quant à la valeur de $F(1)$, elle décroît avec b. C'est ce qui résulte de l'expression:

$$F(1) = \frac{5B - 3pA}{1-p} = 3A - \frac{3A-5B}{1-p},$$

où $p = \dfrac{2(1+b^2+b^4)}{3(1+b^2)}$ est une fonction croissante.

De ce que h croît et $F(1)$ décroît avec b on peut conclure, d'après la proposition du N°. 1, que K est décroissant. On pourrait aussi s'en convaincre directement.

Il est évident maintenant que pour $b = 0$ la droite IG se confond avec FE, et pour $b = a$ elle se confond avec DB. Le point G se meut donc de E vers B, en sorte que $F(1)$ ne devient pas inférieur à d.

On voit maintenant immédiatement qu'il ne peut exister une loi de densité qui donne pour $x = b$ une densité supérieure à K; donc $T(b) = K$, c.à.d.:

$$(18).\quad T(b) = \frac{6(5-6b+b^6)A - 15(3-4b+b^4)B}{1-3b^4+2b^6} \qquad 0 \leq b \leq a.$$

Comme on le voit $T(a) = m$.

L'équation de la droite IG est:

$$(19)\ldots \begin{cases} y = K - h(x-b) & \text{où} \\ K = \dfrac{6(5-6b+b^6)A - 15(3-4b+b^4)B}{1-3b^4+2b^6} \\ h = \dfrac{36A - 60B}{1-3b^4+2b^6}. \end{cases}$$

Le système de droites IG qu'on obtient en faisant varier b de 0 à a sera appelé le *premier système de droites.*

9. Supposons maintenant $a < b < 1$, et déterminons une loi de densité $f(x)$ ainsi:

$$f(x) = K - h(x - b) \qquad o < x < b$$
$$f(x) = \frac{1}{1-b}\Big[K - db - (K - d)x\Big] \qquad b < x < 1$$

représentée par la ligne brisée KLB de la fig. 2.

En déterminant K, h par les conditions (1), (2), on trouve:

$$K = \frac{30B - 12b^2A - (5 - b - 4b^2)d}{1+b}$$

$$h = \frac{12(1 \div b^2 + b^4)A - 30(1 + b^2)B + 2(1 + b^2 - 2b^4)d}{b^4}$$

La valeur de K décroît avec b, comme on le voit en écrivant:

$$K = d + \frac{(30B - 6d) - b^2(12A - 4d)}{1+b}.$$

Au contraire, en observant que:

$$h = 12A - 4d - \frac{2(15B - 6A - d)}{q-1},$$

où $q = \dfrac{1 + b^2 + b^4}{1 + b^2}$ est une fonction croissante, on voit que la valeur de h croît avec b.

Il est évident maintenant que pour $b = a$ la droite KL se confond avec CD et $h = o$. Pour des valeurs plus grandes de b, h est donc positif, et lorsque $b = 1$ la droite KL se confond avec FE.

Il est facile de s'assurer qu'il ne peut exister aucune loi de densité qui donne pour $x = b$ une densité supérieure à K, donc:

$$(20)\ . \quad T(b) = \frac{30B - 12b^2A - (5 - b - 4b^2)d}{1+b} \qquad a \leqq b < 1.$$

La fonction $T(b)$ est maintenant parfaitement connue; remarquons qu'elle présente une discontinuité: en effet, ε étant infiniment

petit, on a:

$$T(1-\varepsilon) = 15B - 6A > d$$
$$T(1) = d.$$

En représentant la fonction $T(b)$ par une courbe, cette courbe se compose de deux arcs qui se rencontrent en D, où ils ont des tangentes distinctes. La tangente en F se confond avec la droite FE et les deux arcs sont convexes vers OA.

L'équation de la droite KL est:

$$(21)\ldots \left\{ \begin{aligned} & y = K - h(x-b) \qquad \text{où} \\ & K = \frac{30B - 12b^2A - (5 - b - 4b^2)d}{1+b}, \\ & h = \frac{12(1+b^2+b^4)A - 30(1+b^2)B + 2(1+b^2-2b^4)d}{b^4}. \end{aligned} \right.$$

Le système des droites KL qu'on obtient en faisant varier b de a à 1 sera appelé le *second système de droites*. On verra facilement que l'intersection K se meut toujours dans le même sens de C vers F.

10. Il nous reste à déterminer la fonction $t(b)$, dont jusqu'à présent nous connaissons seulement les valeurs particulières $t(o) = m$, $t(1) = d$. Or cela ne semble pas possible d'une manière aussi directe que celle qui nous a fait trouver la valeur de $T(b)$. On verra aussi que l'expression analytique de $t(b)$ est beaucoup plus compliquée que celle de $T(b)$.

Imaginons que dans la fig. 2 on ait tracé les droites du premier et du second système. Ces droites occupent, dans leur ensemble, une certaine partie du plan, limitée inférieurement par une certaine courbe. Nous allons déterminer cette courbe, mais, pour motiver cette recherche qui pourrait sembler étrangère à notre objet, disons dès à présent que cette courbe n'est autre chose que la représentation géométrique de la fonction $t(b)$.

Évidemment, nous sommes amenés ainsi à la recherche des courbes enveloppes des deux systèmes de droites.

Courbe enveloppe du premier système de droites.

L'équation d'une droite du premier système a déjà été donnée, voyez form. (19). Pour avoir l'enveloppe, il faut prendre la dérivée par rapport à b et éliminer ensuite ce paramètre entre l'équation obtenue et l'équation primitive. On obtiendrait ainsi l'équation de la courbe enveloppe, mais cela serait de peu d'importance pour notre objet, et il est bien plus naturel d'exprimer seulement les coordonnées x, y de la courbe par le paramètre b, dont on connaît la signification. Les équations étant linéaires en x et y, ce calcul n'a aucune difficulté et l'on obtient:

$$(22) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} x = \dfrac{10 + b^2 + b^4}{12} & o \leqq b \leqq a \\ y = \dfrac{5B - 3b^2 A}{1 - b^2}. \end{cases}$$

Il est remarquable que l'expression de x ne contient ni A, ni B. On obtient les extrémités P, Q de l'arc courbe, situées sur les droites FE, DB, en posant $b = o$ et $b = a$. L'abscisse du point P est donc $\frac{5}{6}$, celle de Q est $= \dfrac{10 + a^2 + a^4}{12}$ et par conséquent inférieure à l'unité.

Courbe enveloppe du second système de droites. On peut suivre la même voie pour obtenir cette seconde courbe, en partant de l'équation (21). On obtient par un calcul un peu laborieux, mais qui ne présente pas de difficulté:

$$(23) \ldots \begin{cases} (1+b)^2(4+2b^2)x = 3b + 6b^2 + 4b^3 + 2b^4, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a \leqq b \leqq 1 \\ b^3(1+b)^2(4+2b^2)y = 12(1+2b+3b^2+4b^3+5b^4)A \\ \qquad - 30(1+2b+3b^2)B \\ \qquad + 2(1+b)(1-b)^2(1+3b+7b^2+3b^3+b^4)d \end{cases}$$

Ici encore l'expression de x ne contient point les données A, B, d.

On obtient les extrémités R, S de l'arc courbe, situées sur les droites CD, FE, en posant $b = a$ et $b = 1$. L'abscisse du point R est positive, celle de S est $\frac{5}{8}$.

D'après cela, la limite inférieure de la partie du plan occupée

par les droites du premier et second système se compose des 5 parties suivantes:

1° la droite horizontale CR,
2° l'arc courbe RS,
3° la droite inclinée SP,
4° l'arc courbe PQ,
5° la droite inclinée QB.

Nous allons faire voir maintenant que cette ligne $CRSPQB$ est réellement la représentation géométrique de la fonction cherchée $t(b)$. Supposons qu'on trace la ligne $y=f(x)$ et nommons cette ligne une courbe de densité. Alors nous devons montrer qu'aucune courbe de densité n'est possible qui pénètre dans la partie du plan au-dessous de $CRSPQB$.

11. Voici d'abord quelques observations préliminaires:

(A) Une courbe de densité (qui commence toujours en B), ne peut avoir en B une inclinaison plus faible sur l'axe OA que la ligne BD. Cela est évident parce qu'elle doit couper en deux points la ligne brisée CDB, d'après la proposition du N°. 1.

(B) Toute courbe de densité doit couper en deux points la droite EF.

En suivant une courbe de densité de B vers l'axe OY, l'inclinaison de la tangente sur OA va toujours en diminuant, d'après notre hypothèse. Il est évident par là que l'inclinaison de cette tangente surpasse celle de EF pour la partie de la courbe entre B et la première intersection avec EF, tandis que l'inclinaison de la tangente est plus faible que celle de EF pour la partie de la courbe entre le second point d'intersection avec EF et l'axe OY.

Supposons maintenant qu'il existe une courbe de densité dont un point A est situé au-dessous de la courbe $CRSPQB$.

Je distingue deux cas:

1°. Le point A se trouve entre B et la première intersection de la courbe avec EF. (fig. 3.)

Alors la tangente en A doit couper la ligne $B\,E$ dans un point T au-dessous de E parce que l'inclinaison de la tangente est plus forte que celle de $E\,F$. Mais ce point T doit se trouver au-dessus de B et ne peut se confondre avec B, car dans ce dernier cas la courbe de densité entre A et B devrait se confondre avec sa tangente $A\,B$, ce qui est impossible d'après (A).

Maintenant par le point T passe une droite du premier système $T\,S$, qu'on peut compléter par une droite horizontale $S\,U$ de manière à obtenir une ligne brisée $T\,S\,U$, représentation d'une fonction $F(x)$ qui satisfait aux conditions (3) [1]).

Or la courbe de densité se trouve située entièrement en dessous de sa tangente $T\,A$, par conséquent elle ne peut couper la droite $T\,S$. Quant à la droite horizontale $S\,U$, elle ne peut la couper qu'en un seul point. Mais, d'après la proposition du N°. 1, chaque courbe de densité doit avoir au moins deux intersections avec $T\,S\,U$, par conséquent il ne peut exister une courbe de densité avec le point A au-dessous de $C\,R\,S\,P\,Q\,B$.

2°. Le point A se trouve entre la seconde intersection de la courbe de densité avec $E\,F$ et l'axe $O\,Y$ (fig. 4). Alors la tangente en A doit couper $O\,Y$ en un point T au-dessous de F, parce que l'inclinaison de cette tangente sur $O\,X$ est plus faible que celle de $E\,F$. Le point T se trouve naturellement au-dessus de C, parce que la courbe elle-même vient rencontrer l'axe $O\,Y$ au-dessus ce C.

Maintenant il passe par T une droite $T\,S$ du second système, et joignant S et B par une droite, on peut regarder $T\,S\,B$ comme une courbe de densité. Mais évidemment la courbe de densité passant par A ne peut couper la droite $T\,S$, et l'on se trouve de nouveau en contradiction avec la proposition du N°. 1.

En somme il ne peut exister aucune courbe de densité qui pénètre dans la partie du plan au-dessous de $C\,R\,S\,P\,Q\,B$ et cette courbe est donc bien, comme nous l'avons annoncé, la représentation géométrique de la fonction $t\,(b)$.

1) La droite $T\,S$ doit avoir naturellement une inclinaison sur $O\,X$ plus forte que celle de $T\,A$, parce qu'on suppose que A se trouve dans la partie du plan au-dessous de la courbe limite des droites du premier système.

Voici maintenant la détermination analytique de la fonction $t(b)$.

Nommons x_1, x_2, x_3, x_4 les abscisses des points R, S, P, Q:

$$x_1 = \frac{3a+6a^2+4a^3+2a^4}{(1+a)^2(4+2a^2)}, \quad x_2 = \frac{5}{8}, \quad x_3 = \frac{5}{6}, \quad x_4 = \frac{10+a^2+a^4}{12}.$$

Alors on a:

$$t(b) = m \qquad 0 \leq b \leq x_1.$$

Mais lorsque b est comprise entre x_1 et x_2, il faut d'abord calculer une quantité u comprise entre a et 1 à l'aide de l'équation du 4ième degré:

$$(1+u)^2(4+2u^2)b = 3u + 6u^2 + 4u^3 + 2u^4,$$

et l'on obtient $t(b)$ à l'aide de l'équation:

$$\begin{aligned} u^3(1+u)^2(4+2u^2)\,t(b) = {} & 12\,(1+2u+3u^2+4u^3+5u^4)\,A \\ & - 30\,(1+2u+3u^2)\,B \\ & + 2\,(1+4)\,(1-u)^2\,(1+3u+7u^2+3u^3+u^4)\,d. \end{aligned}$$

On a ensuite:

$$t(b) = 30A - 45B - 12(3A - 5B)\,b \qquad x_2 \leq b \leq x_3.$$

Dans le quatrième intervalle $x_3 \leq b \leq x_4$, il faut calculer la quantité u comprise entre 0 et a à l'aide de:

$$b = \frac{10+u^2+u^4}{12},$$

et ensuite on a

$$t(b) = \frac{5B - 3u^2A}{1-u^2}.$$

Enfin, dans le dernier intervalle $x_4 \leq b \leq 1$, on a:

$$t(b) = m - \frac{m-d}{1-a}(b-a).$$

J'avais d'abord considéré seulement les limites de la densité au centre de la terre, dans les deux hypothèses que nous venons de discuter complètement. En causant sur les résultats obtenus avec M. Bakhuyzen, celui-ci me suggéra l'idée de chercher des limites de la densité dans un point quelconque de l'intérieur de la terre. Je me suis aperçu alors que ma méthode donnait encore facilement la solution de ce problème plus général.

Troisième Partie.

12. Pour la réduction en nombres des résultats obtenus par la discussion de l'hypothèse II, j'adopterai les valeurs $d = 2.6$, $\Delta = 5.56$, ce dernier nombre étant celui donné par MM. Cornu et Baille [*Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc.* Tome 76]. Quant à λ, cette constante est déterminée par la relation:

$$\lambda = \frac{\frac{C - A}{C}}{\varepsilon - \frac{1}{2}\varphi},$$

C et A étant les moments d'inertie de la terre par rapport à l'axe de rotation et à un diamètre quelconque de l'équateur, ε l'aplatissement de la terre, φ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur. J'ai adopté la valeur

$$\frac{C - A}{C} = 0.00324256 \quad ^{1})$$

obtenue par M. Nyren dans son Mémoire sur la détermination de la nutation de l'axe terrestre. [*Mém. de l'Acad. Impér. de St. Pétersb.*, VIIe Série, Tome XIX].

Quant à ε et φ, j'ai adopté les valeurs déduites par M. Listing *Nachrichte der Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen* 1877):

$$\varepsilon = 0.003466445 = 1 : 288.4800$$
$$\varphi = 0.003467199 = 1 : 288.4179.$$

On en déduit $\lambda = 1.8712$, mais j'ai adopté simplement:

$$\lambda = 1.87.$$

Ce nombre est certainement sujet à quelque incertitude; il me semble pourtant difficile d'admettre que l'erreur surpasse notablement 0.06. J'ai donc calculé quelques valeurs numériques des fonctions $T(b)$ et $t(b)$ en adoptant les valeurs:

$$d = 2.6\,,\ \Delta = 5.56\,,\ \lambda = 1.87,$$

[1]) La légère différence entre ce nombre et celui qu'on trouve à la page 19 du Mémoire de M. Nyren s'explique par la Note qu'on trouve à la page 54.

mais, comme une faible variation de λ a une influence notable sur les résultats, j'ai encore repris le même calcul avec la valeur $\lambda = 1.92$.

Voici maintenant les valeurs obtenues, la fig. 5 donne la représentation graphique correspondant à la valeur $\lambda = 1.87$:

$\lambda = 1.87$, $a = 0.73985$, $m = 6.998$, $M = 11.001$, $D = 3.746$.
$\lambda = 1.92$, $a = 0.65416$, $m = 7.613$, $M = 12.162$, $D = 3.359$.

$\lambda = 1.87$, $x_1 = 0.50077$, $x_2 = \frac{5}{8}$, $x_3 = \frac{5}{6}$, $x_4 = 0.90392$,
$\lambda = 1.92$, $x_1 = 0.45278$, $x_2 = \frac{5}{8}$, $x_3 = \frac{5}{6}$, $x_4 = 0.88425$.

b	$\lambda = 1.87$ $T(b)$	$\lambda = 1.87$ $t(b)$	$\lambda = 1.92$ $T(b)$	$\lambda = 1.92$ $t(b)$
0.00	11.00	7.00	12.16	7.61
0.05	10.64	7.00	11.72	7.61
0.10	10.28	7.00	11.28	7.61
0.15	9.92	7.00	10.85	7.61
0.20	9.57	7.00	10.43	7.61
0.25	9.24	7.00	10.02	7.61
0.30	8.92	7.00	9.63	7.61
0.35	8.62	7.00	9.27	7.61
0.40	8.34	7.00	8.93	7.61
0.45	8.08	7.00	8.62	7.61
0.50	7.84	7.00	8.33	7.51
0.55	7.63	6.90	8.07	7.24
0.60	7.44	6.64	7.84	6.87
0.65	7.27	6.29	7.63	6.44
0.70	7.11	5.92	7.05	6.00
0.75	6.87	5.56	6.43	5.56
0.80	6.24	5.20	5.81	5.12
0.85	5.62	4.83	5.20	4.68
0.90	4.99	4.29	4.58	4.05
0.95	4.37	3.45	3.97	3.32
1.00	2.60 (3.75)	2.60	2.60 (3.36)	2.60

13. Newton, en considérant la terre comme une masse fluide homogène, douée d'un mouvement de rotation, et en supposant que la forme propre à l'équilibre est celle d'un ellipsoïde de révolution, a déterminé le rapport des axes du globe terrestre. En nommant φ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, il trouve l'aplatissement égal à $\frac{5}{4}\varphi$.

Clairaut, dans sa *Théorie de la figure de la terre*, a confirmé ce résultat, et, en abandonnant l'hypothèse de l'homogénéité, il a donné pour la première fois le moyen de déterminer l'aplatissement en supposant donnée la loi de la variation de la densité. En supposant que la densité croît constamment à mesure qu'on s'approche du centre de la terre, il arrive à ce résultat que l'aplatissement est plus faible que dans l'hypothèse de l'homogénéité.

Quand, plus tard, les observations avaient montré d'une manière certaine que l'aplatissement du globe terrestre est, en effet, plus faible que dans l'hypothèse d'une densité constante, il était naturel de proposer une loi de densité propre à donner l'aplatissement observé.

Il paraît que la première hypothèse proposée est celle de Legendre, que Laplace a discutée plus tard dans la *Mécanique céleste*; elle revient à supposer:

$$f(x) = C\frac{\sin nx}{x}.$$

On en déduit aisément:

$$\Delta = 3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 3\,C\frac{\sin n - n\cos n}{n^2}$$

$$\lambda = \frac{\int_0^1 x^2 f(x)\,dx}{\int_0^1 x^4 f(x)\,dx} = \frac{n^2(\sin n - n\cos n)}{(3n^2-6)\sin n - (n^3 - 6n)\cos n}$$

$$d = C\sin n$$

D'après la théorie de Clairaut, l'aplatissement ε se détermine à l'aide de

$$\varepsilon = \tfrac{5}{2}\varphi \frac{\dfrac{3(1-n\,cotg\,n)}{n^2} - 1}{\dfrac{n^2}{1-n\,cotg\,n} - 2 - n\,cotg\,n}.$$

En adoptant la valeur $\Delta = 5.56$ et la valeur de φ donnée précédemment d'après Listing, j'ai calculé les valeurs de d, λ, ε pour quelques valeurs de n; — voici les résultats:

Hypothèse de Legendre.

n	d	λ	ε
136°	3.02	1.948	1 : 286.3
137	2.97	1.954	1 : 287.5
138	2.93	1.961	1 : 288.7
139	2.88	1.968	1 : 290.0
140	2.83	1.975	1 : 291.3
141	2.78	1.982	1 : 292.6
142	2.73	1.990	1 : 294.0
143	2.68	1.998	1 : 295.4
144	2.63	2.006	1 : 296.8
145	2.57	2.014	1 : 298.2
146	2.52	2.022	1 : 299.7

Comme on le voit, l'hypothèse de Legendre ne peut pas représenter suffisamment les faits observés. Dans la *Mécanique céleste*, Laplace admet la valeur $n = 150°$, ce qui répond à la valeur 1 : 306.6 de l'aplatissement, qu'on ne peut plus admettre. On voit aussi qu'on obtient ainsi une valeur beaucoup trop forte de λ.

La loi de Legendre $f(x) = C\dfrac{\sin nx}{x}$ ne satisfait pas à notre hypothèse II. On trouve que $f''(x)$ change de signe dans le voisinage de la surface de la terre, en sorte que la courbe de densité présente une inflexion. Toutefois, la convexité vers l'axe

OA est peu sensible. — Plus tard M. Roche a proposé la formule $f(x) = a - b x^2$; mais je passerai directement à la loi plus générale:

$$f(x) = a - b x^n,$$

proposée par M. Lipschitz. (*Journal* de Borchardt. Bd 62).

Dans cette hypothèse, l'équation différentielle du second ordre d'où dépend l'aplatissement peut s'intégrer à l'aide de la fonction hypergéométrique de Gauss. Les trois constantes a, b, n sont déterminées à l'aide des trois données d, Δ, et $\frac{\varepsilon}{\varphi}$.

M. Lipschitz obtient une équation transcendante pour l'inconnue n et démontre par une analyse ingénieuse que cette équation admet une seule racine positive. Dès que n est connu, on obtient a et b par les formules:

$$a = \frac{(n+3)\Delta - 3d}{n}$$

$$b = \frac{(n+3)(\Delta - d)}{n}.$$

M. Lipschitz obtient ainsi:

$$f(x) = 9.453\, x^{2.39},$$

en attribuant à $d, \Delta, \frac{\varepsilon}{\varphi}$ des valeurs qui diffèrent légèrement de celles que nous avons données plus haut. Comme on le voit, la seule donnée qui n'a pas été employée par M. Lipschitz, c'est la quantité λ. On peut donc avoir une vérification en calculant la valeur de λ d'après la formule de M. Lipschitz. J'ai donc calculé la valeur de λ en adoptant la valeur $\Delta = 5.56$ et les valeurs de ε et de φ d'après Listing, pour différentes valeurs de d. J'ai obtenu ainsi: [1])

---

[1]) J'ai pu abréger beaucoup les calculs nécessaires à l'aide d'une formule que M. Tisserand a bien voulu me communiquer et que l'on trouvera dans les *Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc.* (Octobre. 13, 1884). Cette formule donne directement une valeur suffisamment approchée de n.

d	λ
2.0	1.963
2.2	1.963
2.4	1.963
2.6	1.963
2.8	1.964
3.0	1.964

Comme on le voit, cette valeur de λ est un peu forte et à peu près indépendante de d. Mais la valeur de λ ne dépend pas des valeurs absolues de d et Δ, mais seulement de leur rapport. On ne peut donc pas obtenir une valeur plus faible de λ en faisant varier Δ. Il reste seulement à chercher l'influence de l'aplatissement. Les résultats précédents supposent $\varepsilon = 1 : 288.48$, mais en posant $\varepsilon = 1 : 280$, $d = 2.6$ (les autres données restant les mêmes), il vient:

$$\lambda = 1.927.$$

Comme on le voit, dans toutes les hypothèses admissibles, on obtiendra toujours une valeur de λ un peu forte. Cela semble indiquer que la densité au centre est encore un peu plus faible et que la diminution de la densité en s'éloignant du centre est encore plus lente, que ne le suppose la loi de M. Lipschitz.

LEIDE, Octobre 1884.

SUR L'ÉQUATION COMPLÈTE DU VIRIEL,

PAR

C. H. C. GRINWIS.

---

1. M. R. Clausius, professeur à Bonn, fit, le 13 juin 1870, à la *„Niederreinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde"*, une communication sur „une proposition applicable à la chaleur", communication qui bientôt après fut publiée dans les Poggendorff *Annalen*, t. 141, p. 124.

Dans ce Mémoire, M. Clausius établit cette loi connue, que, lors du mouvement dit stationnaire d'un nombre quelconque de points matériels, la force vive moyenne du système est égale à son viriel, ou, analytiquement:

$$\Sigma \frac{m}{2} \overline{v^2} = -\tfrac{1}{2} \Sigma \overline{(Xx + Yy + Zz)}\ , \quad \ldots \quad (1)$$

équation où v désigne la vitesse d'une particule m, X, Y, Z les composantes de la force qui agit sur cette particule, et x, y, z les coordonnées de la particule, c'est-à-dire du point d'application de la force, tandis que les traits horizontaux, placés au-dessus des deux membres, indiquent qu'on a en vue les *valeurs moyennes* pendant le mouvement stationnaire.

La grandeur représentée dans le second membre de cette équation dépend des forces qui agissent sur le système et serait, si pour des coordonnées données toutes les forces variaient dans le même rapport, proportionnelle à ces forces.

M. Clausius propose, en conséquence, de donner à la valeur moyenne de cette grandeur le nom de *viriel* (du latin *vis*), analogue à celui de *potentiel*; nous adopterons cette dénomination,

en l'appliquant toutefois, ainsi qu'on le fait assez généralement, à la grandeur

$$-\frac{1}{2}\Sigma(Xx+Yy+Zz)$$

elle-même, et non à sa moyenne.

La loi ci-dessus s'exprime alors en disant que la force vive moyenne du système est égale à son viriel *moyen*.

2. La règle (1) se déduit de la relation:

$$\frac{d^2(x^2)}{dt^2}=2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2x\frac{d^2x}{dt^2},$$

qui donne immédiatement:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{m}{4}\frac{d^2(x^2)}{dt^2}-\frac{1}{2}Xx\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(2)$$

En ajoutant à cette expression les expressions analogues pour y et z, on obtient, r désignant la distance de la particule à l'origine des coordonnées:

$$\frac{m}{2}v^2=\frac{m}{4}\frac{d^2(mr^2)}{dt^2}-\frac{1}{2}(Xx+Yy+Zz),\,.\,.\,.\,(3)$$

équation qui, pour un système de points matériels, devient:

$$\Sigma\frac{m}{2}v^2=\frac{1}{4}\Sigma\frac{d^2(mr^2)}{dt^2}-\frac{1}{2}\Sigma(Xx+Yy+Zz).\,.\,(3_a)$$

Les équations (3) et (3_a) forment deux relations, qu'on pourrait appeler, au point de vue de la loi énoncée par Clausius, les équations *complètes* du viriel. Elles ont été étudiées, en 1872, par Villarceau (*Compt Rend.*, t. 75, p. 232—237), et Clausius, en 1874 (Pogg. *Ann.*, *Jubelband*, p. 411—423), s'est longuement arrêté sur les transformations que l'équation (3) et surtout l'équation (3_a) peuvent subir.

Lorsque, dans le mouvement stationnaire, on considère les valeurs moyennes pour un laps de temps suffisant, le terme en $\frac{d^2x^2}{dt^2}$ disparaît de l'équation (2), et l'éq. (3_a) se réduit à l'équation (1), donnée par Clausius.

3. Nous nous proposons d'examiner, de plus près qu'on ne l'a fait jusqu'ici, le terme $\frac{d^2\, mr^2}{dt^2}$, qui entre dans les équations complètes (3) et (3_a). Cette expression, — qui représente la seconde dérivée par rapport au temps pour le moment d'inertie polaire, relativement à l'origine, du point ou du système en mouvement, — est, de même que le potentiel et le viriel, une fonction des coordonnées, c'est-à-dire qu'elle a pour chaque point de l'espace une valeur propre; elle change donc avec le point pris pour origine, et elle s'évanouira pour certains points particuliers.

Ces changements, qui déterminent la vraie signification de l'équation du viriel, n'ont jusqu'ici pas attiré l'attention, ou n'ont été signalés qu'en passant.

Pour une origine donnée, seulement, nous trouvons, au sujet de cette dérivée du second ordre, des indications intéressantes.

C'est ainsi que, pour un système de points, Jacobi (*Vorlesungen über Dynamik*, p. 27) a déjà, en cas d'hypothèses déterminées concernant la fonction des forces, fixé l'attention sur la valeur générale de cette expression. M. Lipschitz aussi (*Journal von Crelle*, t. 66) a examiné la signification de $\frac{d^2\, \Sigma\, m\, r^2}{d\, t^2}$, en faisant, sur la nature de la fonction des forces, l'hypothèse qu'elle est une fonction algébrique homogène des coordonnées, et en cherchant pour ce cas, la condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement soit stable.

Il y aurait quelque intérêt, semble-t-il, à considérer au point de vue ci-dessus indiqué la signification de l'équation complète, et c'est ce que nous allons faire, en nous bornant provisoirement à l'équation (3) pour un point matériel; plus tard, nous étendrons peut-être cette étude à l'équation (3_a), relative à un système de points.

En premier lieu, nous nous occuperons des changements que $\frac{d^2\, m\, r^2}{dt^2}$ éprouve à mesure que l'origine se déplace, et nous

examinerons ces changements plus en particulier pour quelques exemples de mouvement. Ensuite, nous montrerons que cette expression peut être considérée comme la différence de deux viriels.

Enfin, nous ferons ressortir la signification propre de la proposition de Clausius, pour laquelle ce coefficient différentiel disparaît.

4. Le viriel pour un point unique $-\frac{1}{2}(Xx+Yy+Zz)$ se laisse réduire, F étant la force qui agit sur le point et φ l'angle qu'elle fait avec le rayon vecteur r, à

$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{Xx+Yy+Zz}{Fr}\right)Fr=-\tfrac{1}{2}Fr\cos\varphi\,;$$

de sorte que, en désignant par R la composante de la force suivant r, *comptée positivement en allant vers l'origine des coordonnées*, on a:

$$-\tfrac{1}{2}(Xx+Yy+Zz)=\tfrac{1}{2}Rr \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Le viriel d'une force est donc égal au demi-produit du rayon vecteur du point d'application par la composante de cette force suivant le rayon vecteur, prise positivement en allant vers l'origine.

Il peut par conséquent, pour ce qui concerne sa grandeur, abstraction faite du signe, être regardé comme la moitié du moment non actif (perdu) de cette force par rapport à l'origine. Le moment actif Q de cette force, ou le couple qui résulte de la réduction de la force à l'origine, est égal à $Fr\sin\varphi$; de sorte que, si V représente le viriel double, ou $V=Fr\cos\varphi$, on a:

$$V^2+Q^2=F^2r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Le viriel dépend donc évidemment du point d'application de la force, et joue par suite un rôle dans les recherches concernant les cas où les forces changent de direction tout en conservant les mêmes points d'application, par exemple, dans l'étude de l'équilibre astatique.

Mais on voit, en outre, que le viriel change de valeur avec l'origine O à laquelle il se rapporte (pour laquelle il est pris).

Plus loin nous reviendrons sur ce point avec plus de détails.

5. En conséquence de ce que nous venons de dire, l'équation (3) devient:

$$\frac{m}{2} v^2 = \tfrac{1}{4} \frac{d^2\, m r^2}{d t^2} + \tfrac{1}{2} R r \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Désignons par P le moment d'inertie polaire $m r^2$ du point relativement à l'origine, et par P' et P'' les dérivées première et seconde de ce moment par rapport au temps; soit, comme à l'ordinaire, T la demi-force vive du point; l'équation (6) prend alors la forme

$$4\, T = P'' + 2\, R r, \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

d'où l'on tire pour P''

$$P'' = 4\, T \left\{ 1 - \frac{R r}{2\, T} \right\}, \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

de sorte que P'', tout comme le viriel, change avec r, par conséquent avec l'origine; tous les deux sont des fonctions des coordonnées du point d'application de la force; leur valeur varie donc, de même que celle de ces coordonnées, avec le lieu du point qu'on choisit pour origine et par rapport auquel le viriel est pris.

Soit d la projection de r sur la direction de la résultante; puisque.

$$R = F \cos \varphi,$$

on aura

$$R r = F r \cos \varphi = F d$$

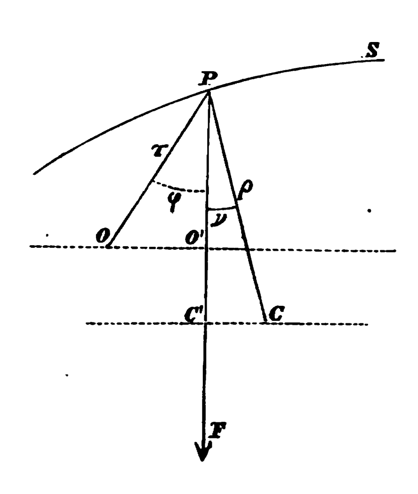
et

$$P'' = 4\, T \left\{ 1 - \frac{F d}{2\, T} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Comme P'' est alors constant en même temps que d, projection de r sur la direction de la résultante, on voit que, pour tous les points d'un plan perpendiculaire à la résultante, ou, en cas de mouvement dans un plan, pour tous les points d'une perpendiculaire à F, P'' conserve la même valeur. P'' disparaît pour les points

de la droite menée, à la distance $d = \frac{2T}{F}$ du point mobile, perpendiculairement à la résultante.

6. Bornons-nous au mouvement plan d'un point unique p, soit s la trajectoire, F la résultante, $p\,C = r$ le rayon de courbure en p; représentons par φ et ν les angles que r et ϱ font avec la résultante; il suit alors, de l'équation (7),



$$P'' = 2\,(m\,v^2 - R\,r)\,..\,(10)$$

ou, puisque $F\cos\nu$, composante normale de la force mouvante, est $= \frac{m\,v^2}{\varrho}$, et $R = F\cos\varphi$,

$$P'' = 2\,F(\varrho\cos\nu - r\cos\varphi)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(11)$$

Si $p\,C' = \varrho\cos\nu$ et $p\,O' = r\cos\varphi$ sont les projections du rayon de courbure et du rayon vecteur sur la direction de F, on aura

$$P'' = 2\,F(p\,C' - p\,O')\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(11_a)$$

ou, en posant $p\,C' - p\,O' = l$,

$$P'' = 2\,F\,l\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(11_b)$$

P'' est par conséquent proportionnel à la différence des deux projections.

Si l'on mène donc, par le centre de courbure C de la trajectoire en p, une ligne (ou, pour l'espace, un plan) perpendiculaire à la direction de la résultante F, cette ligne (ou ce plan) sera le lieu géométrique des points pour lesquels P'' s'annule et, pour abréger, nous l'appellerons la *ligne zéro* (ou le *plan zéro*). Pour toute ligne (ou tout plan) parallèle à cette ligne (ou à ce plan) zéro et située à une distance l, on aura $P'' = 2\,F\,l$,

et cette valeur sera positive ou négative suivant que la ligne (ou le plan) se trouve, par rapport à la ligne (ou au plan) zéro, du même côté que le point p, ou du côté opposé.

7. Comme conséquences immédiates des équations (11) nous remarquerons ce qui suit, en nous bornant au mouvement dans un plan:

I. Pour les points de la tangente à la courbe en p, on a $\cos\varphi = \sin\nu$, par conséquent:

$$P'' = 2\,F\,(\varrho \cos\nu - r \sin\nu) = 2\,m\left(v^2 - r\,\frac{dv}{dt}\right),$$

valeur qui, pour les différents points de la tangente, est, en général, variable avec r, à moins que la tangente ne soit perpendiculaire à la force, cas où $\nu = 0$ et où, par conséquent, le terme $r\,\frac{dv}{dt}$ s'évanouit.

Pour le point p on a $r = 0$ et

$$P'' = 2\,m\,v^2 = 4\,T.$$

II. Pour les points de la perpendiculaire élevée en p sur la force F, on a $\varphi = 90°$, $\cos\varphi = 0$, et par conséquent

$$P'' = 2\,m\,v^2 = 4\,T.$$

III. Lorsque F coïncide avec la normale, c'est-à-dire lorsque $F = \frac{m\,v^2}{\varrho}$ et $\cos\nu = 1$, on a, pour un point quelconque O (r, φ) du plan,

$$P'' = 2\,F(\varrho - r\cos\varphi) = 2m\,v^2\left(1 - \frac{r}{\varrho}\cos\varphi\right),$$

de sorte que, si $r\cos\varphi = \varrho$ (cas où O se trouve sur la ligne zéro), P'' disparaît.

IV. En vertu de l'équation (11), on peut écrire:

$$P'' = 4\,T\left\{1 - \frac{r\cos\varphi}{\varrho\cos\nu}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

et en prenant de nouveau, sur la direction de la force, à partir du point mobile ϱ, une distance $d = r\cos\varphi$, on a:

$$P'' = 4\,T\left\{1 - \frac{d}{\varrho \cos \nu}\right\}, \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

de sorte que P'' est constant pour tous les points d'une ligne perpendiculaire à la direction de la force, et que la ligne zéro est située à la distance $d = \varrho \cos \nu$, ainsi que nous l'avions déjà trouvé ci-dessus.

V. Prenons à partir de p, dans la direction opposée à celle de la force, une distance n; on a alors, pour une ligne menée par ce point perpendiculairement à la force,

$$P'' = 4\,T\left\{1 + \frac{n}{\varrho \cos \nu}\right\}, \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

d'où résulte ensuite

$$\frac{d\,P''}{d\,n} = \frac{4\,T}{\varrho \cos \nu} = 2\,F, \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

de sorte que la derivée de P'' par rapport à cette direction est égale au double de la force. Remarquons l'analogie qui existe entre cette expression et celle de la dérivée de la fonction potentielle, laquelle fonction est analogue à P'', puisque, ainsi qu'on le verra plus loin, $\frac{d^2\,m\,r^2}{d\,t^2}$ est proportionnel à la différence de deux viriels, et que le viriel et le potentiel peuvent être regardés comme des grandeurs analogues.

8. Comme application des formules (9) et (13) au mouvement plan d'un point matériel, nous déterminerons P'', — pour toute ligne menée perpendiculairement à la direction de la force, à une distance d du point mobile comptée vers la partie du plan suivant laquelle la force agit, — par les valeurs:

$$P'' = 4\,T\left\{1 - \frac{F\,d}{2\,T}\right\} = 4\,T\left\{1 - \frac{d}{\varrho \cos \nu}\right\}.$$

I. *Mouvement sur un cercle, le centre de force étant au centre du cercle.*

On a alors $\varrho = a =$ const. $\nu = 0$

$$P'' = 4\,T \left\{ 1 - \frac{d}{a} \right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

de sorte que la ligne zéro passe constamment par le centre et que par conséquent, pour ce point, la demi-force vive est toujours égale au viriel, ou

$$\frac{m}{2}\,v^2 = \tfrac{1}{2}\,F\,a \quad \text{ou} \quad F = \frac{m\,v^2}{a}\ .$$

A partir de la tangente en p, pour les points de laquelle on a $P'' = 4\,T = 2\,m\,v^2$, P'' décroît continûment, et il s'annule pour la droite menée par le centre parallèlement à la tangente; ensuite, P'' devient égal à $-2\,m\,v^2$ pour la tangente au point situé diamétralement. Le diamètre divise le plan en deux parties, dans lesquelles P'' est respectivement positif et négatif. La ligne zéro, passant toujours par le centre, tourne avec le point mobile, de manière à rester toujours parallèle à la tangente en ce point. Pour un point quelconque O, situé à une distance l du centre, P'' est donné par (16), de sorte que, si p est le point mobile, C le centre du cercle et α l'angle que forment $C\,O$ et $C\,p$, on a $d = a - l \cos\alpha$ et

$$P'' = 2\,m\,v^2\,\frac{l}{a}\cos\alpha; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16_a)$$

P'' est donc périodique et change de signe à chaque demi-révolution. Le centre C est le seul point pour lequel P'' soit constamment nul.

II. *Mouvement en cas d'attraction vers un centre fixe, proportionnelle à la distance.*

On sait que dans ce cas, où l'attraction $F = m\,\mu\,r$, on a $T = \tfrac{1}{2}\,m\,\mu\,(a^2 + b^2 - r^2)$, si a et b sont les demi-axes de l'ellipse; il vient donc:

$$P'' = 4\,T \left\{ 1 - \frac{r\,d}{a^2 + b^2 - r^2} \right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

équation pour laquelle on peut aussi écrire, en désignant par f et f' les distances de p aux foyers:

$$P'' = 4\,T \left\{ 1 - \frac{r\,d}{f f'} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17_a)$$

La ligne zéro est perpendiculaire au rayon vecteur, à la distance $d = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{r}$, comptée à partir du point mobile.

L'enveloppe de ces lignes zéro forme une courbe jouissant, en conséquence de ce qui précède, de la propriété que lorsque le point O (l'origine, par rapport à laquelle est pris le viriel) la parcourt, à partir d'un point déterminé, de telle manière que p et 0 restent toujours des *points homologues*, *P'' est constamment nul*; on a donc constamment

$$\frac{m}{2}\,v^2 = \tfrac{1}{2}\,R\,r,$$

c'est-à-dire que, le point homologue de la courbe enveloppe étant pris pour origine, la demi-force vive (il n'est pas question ici de moyenne) est à chaque instant égale au viriel.

Nous ne nous occuperons pas, en ce moment, de déterminer cette enveloppe; remarquons seulement que de pareilles *courbes zéro* peuvent être assignées pour tout mouvement curviligne.

En remarquant que l'énergie potentielle de la masse mobile par rapport au centre est

$$V = \int_r^0 - m\,\mu\,r\,d\,r = \tfrac{1}{2}\,m\,\mu\,r^2,$$

on voit que, pour le centre de l'ellipse, l'équation (17) devient

$$P_0'' = 4\,T \left\{ 1 - \frac{V}{T} \right\} = 4\,(T - V). \ldots\ldots \quad (18)$$

Ici, P'' est donc toujours proportionnel à la différence des énergies actuelle et potentielle du point mobile, et lorsque la ligne zéro passe par l'origine on aura $T = V$; cela arrive quand

$$d = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{r} = r \quad \text{ou} \quad r^2 = \frac{a^2 + b^2}{2},$$

c'est-à-dire, dans les points où les dìagonales du rectangle circonscrit coupent l'ellipse. En ces points l'énergie actuelle est égale à l'énergie potentielle par rapport au centre d'attraction. Pour les deux arcs de l'ellipse limités par ces points aux extrémités du grand axe, $T - V$ est négatif; dans les deux autres parties, près des extrémités du petit axe, on a $T > V$.

De l'équation (18) il suit qu'au centre de l'ellipse on a:

$$P''_0 = 2\, m\, \mu\, (a^2 + b^2 - 2\, r^2).$$

et si l'on désigne par φ l'angle compris entre le rayon vecteur et le grand axe, d'où

$$r^2 = \frac{a^2\, b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi},$$

et qu'on pose

$$1 - \frac{b^2}{a^2} = e^2,$$

on touve, après réduction,

$$P''_0 = -\, 2\, m\, \mu\, a^2\, e^2 \left\{ \frac{1 - (2 - e^2) \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \cos^2 \varphi} \right\};$$

en comptant le temps, de même que φ, à partir de l'extrémité du grand axe, on a:

$$t = \int_0^{\varphi} \frac{r^2\, d\varphi}{a\, b \sqrt{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\, B\, tg \left(\frac{a}{b}\, tg\, \varphi \right),$$

d'où il suit

$$tg\, \varphi = \frac{b}{a}\, tg\, (t \sqrt{\mu}), \qquad \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + (1 - e^2)\, tg^2\, t \sqrt{\mu}},$$

et enfin

$$P_0'' = -\, 2\, m\, \mu\, a^2\, e^2 \cos (2\, t \sqrt{\mu}), \quad \ldots\ldots \quad (18_a)$$

ou, puisque le temps de révolution $\tau = \frac{2\, \pi}{\sqrt{\mu}}$,

$$P_0'' = -\frac{8\pi^2}{\tau^2}\ m a^2 e^2 \cos\left(4\pi \frac{t}{\tau}\right), \ldots\ldots (18_b)$$

ce qui montre que P'' *change périodiquement avec le temps* et que, pour $e = 0$, c'est-à-dire pour le cercle, il est constamment nul.

Par intégration, on trouve:

$$P_0' = -\frac{2\pi}{\tau} m\ a^2\ e^2\ \sin\left(4\pi \frac{t}{\tau}\right), \ldots\ldots (18_c)$$

l'intégrale ne prend pas de constante, puisque, pour $t = 0$, P_0' doit s'évanouir. Intégrant de nouveau, on obtient:

$$P_0 = \frac{m}{2} a^2 e^2 \cos\left(4\pi \frac{t}{\tau}\right) + \text{const.},$$

donc, pour $t = 0$:

$$P_0 = \frac{m}{2} a^2 e^2 + C = m a^2,$$

de sorte qu'on a, en général, pour le centre de l'ellipse,

$$P_0 = \frac{m}{2} a^2 e^2 \cos\left(4\pi \frac{t}{\tau}\right) + \frac{m}{2} a^2 (2 - e^2)$$

ou

$$P_0 = m a^2\left(1 - e^2 \sin^2 2\pi \frac{t}{\tau}\right) \ldots\ldots\ldots (18_d)$$

III. *Mouvement elliptique autour du foyer.* (Attraction en raison inverse du carré de la distance).

En désignant par a la moitié du grand axe de l'ellipse, par f et f' les rayons vecteurs des foyers, on a:

$$F = \frac{m\mu}{f^2},\ 2\,T = v^2 m = \frac{2\,m\mu}{a}\left(\frac{a}{f} - \frac{1}{2}\right) = \frac{m\mu f'}{af}$$

$$P'' = 4\,T\left(1 - \frac{a\,d}{ff'}\right) \ldots\ldots\ldots (19_a)$$

ou

$$P'' = \frac{2\,m\mu}{f}\left\{\frac{f'}{a} - \frac{d}{f}\right\}, \ldots\ldots\ldots (19_b)$$

et puisque $ff' = a^2 + b^2 - r^2$, lorsque r est le rayon vecteur pris à partir du centre de l'ellipse, on a encore:

$$P'' = 4\,T\left(1 - \frac{a\,d}{a^2 + b^2 - r^2}\right). \quad \ldots\ldots \quad (19_c)$$

La forme de P'' dans l'équation (19_a) est remarquable sous ce rapport que f, le rayon vecteur du foyer actif, et f', le rayon vecteur du second foyer (où il n'y a pas d'action), y entrent d'une manière symétrique.

La ligne zéro est, ainsi qu'il résulte de l'équation (19_c), une droite menée, à une distance $d = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{a}$ du point mobile, perpendiculairement au rayon vecteur f.

Pour le foyer actif (le centre de force), l'équation (19_b) donne, lorsque $d = f$,

$$P''_0 = \frac{2\,m\,\mu}{f}\left(\frac{f' - a}{a}\right)$$

ou, à cause de $f' - a = a - f$,

$$P''_0 = 2\,m\,\mu\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{a}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19_d)$$

P''_0 a donc la valeur la plus grande pour l'extrémité du grand axe située près de ce foyer, extrémité où $f = a\,(1 - e)$; cette valeur est:

$$P''_0 = \frac{2\,m\,\mu}{a}\,\frac{e}{1 - e} = \frac{2\,m\,\mu\,e}{f};$$

pour l'autre extrémité du grand axe, on a $f = a\,(1 + e)$, par conséquent:

$$P''_0 = -\frac{2\,m\,\mu}{a}\,\frac{e}{1 + e} = -\frac{2\,m\,\mu\,e}{f},$$

de sorte que, aux extrémités du grand axe, P''_0 est en raison inverse du rayon vecteur de ces extrémités.

Pour les extrémités du petit axe, puisque alors $f = a$, l'équation (19_d) donne $P''_0 = 0$, ce qui s'accorde avec la formule (19); la ligne zéro est déterminée, en effet, par $d = \frac{ff'}{a}$, et par conséquent pour l'extremité du petit axe, où $f' = f = a$, par $d = f = a$. La ligne zéro passe alors par le centre d'attraction.

Pour les extrémités du grand axe, la position de la ligne zéro est donnée par

$$d = \frac{a^2 (1 - e^2)}{a} = \frac{b^2}{a};$$

pour ces points, les lignes zéro coïncident donc avec celles du mouvement elliptique autour du centre de l'ellipse pris pour centre de force.

IV. *Mouvement parabolique autour du foyer.* (Attraction en raison inverse du carré de la distance).

Soit r le rayon vecteur pris à partir du foyer; on a alors $F = \frac{m\mu}{r^2}$,

$$T = \frac{m\mu}{r},$$

donc

$$P'' = 4\, T\left(1 - \frac{F d}{2\, T}\right) = 4\, T\left(1 - \frac{d}{2 r}\right) \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Les lignes zéro sont perpendiculaires au rayon vecteur, à une distance $d = 2\, r$ du point mobile.

Pour le foyer (centre de force) on a $d = r$, de sorte que

$$P''_0 = 2\, T = \frac{2\, m\mu}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20_a)$$

P''_0 est donc toujours en raison inverse du rayon vecteur, relation qui dans l'ellipse, pour la même loi d'attraction, ne se trouve qu'à l'extrémité du grand axe.

9. Résolvons maintenant la question de savoir comment une particule de masse m doit se mouvoir dans l'espace, pour que $P'' = f(t)$ soit indépendant du point O, par rapport auquel le

viriel est pris et dont nous représentons les coordonnées par a, b, c.

Si x, y, z sont les coordonnées de la particule m, on aura

$$P = m \{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}$$

$$P' = 2m \{(x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z'\}$$

$$P'' = 2m \{(x'^2 + y'^2 + z'^2 + xx'' + yy'' + zz'' - (ax'' + by'' + cz'')\}$$

$$= 4T + 2m \{(x-a)x'' + (y-b)y'' + (z-c)z''\} ;$$

pour que cette valeur soit indépendante de a, b, c, il faut qu'on ait $x'' = 0$, $y'' = 0$, $z'' = 0$: aucune force ne doit donc agir sur la particule, de sorte que c'est seulement en cas de mouvement rectiligne uniforme que P'' a pour tous les points de l'espace la même valeur, à savoir

$$P'' = 4T = 2mv^2 = 2mC^2 ,$$

où C est la vitesse initiale.

10. Une réduction facile montre que $\frac{1}{4}P''$ se laisse représenter par la *différence de deux viriels*; nous avons, en effet,

$$P'' = 4T - 2Rr = 2(mv^2 - Rr),$$

ou, puisque

$$F\cos v = \frac{mv^2}{\varrho}, \qquad P'' = 2(F\varrho\cos v - Rr),$$

$$\tfrac{1}{4}P'' = \tfrac{1}{2}F\varrho\cos v - \tfrac{1}{2}Rr \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Or, $\frac{1}{2}\varrho F\cos v$ est le viriel de la force au centre C du cercle de courbure, $\frac{1}{2}rR$ le viriel pour le point O auquel se rapporte r; on voit donc que $\frac{1}{4}\frac{d^2(mr^2)}{dr^2}$ *est égal à la différence des viriels pour les points C et O*; ou, V désignant le double du viriel,

$$\tfrac{1}{4}P'' = \tfrac{1}{2}V_c - \tfrac{1}{2}V_0 , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21_a)$$

Quand on fait changer le point O, le second viriel, à raison de $\frac{1}{2}Rr = \frac{1}{2}Fr\cos\varphi$, reste le même pour tous les points pour lesquels $r\cos\varphi = d$ reste constant, c'est-à-dire pour tous les points d'une perpendiculaire à la direction de la force. Si cette perpendiculaire passe par le centre de courbure C du point p de

la trajectoire, où se trouve le point mobile, on a $d = \varrho \cos \nu$, et par suite

$$\tfrac{1}{2} P'' = \tfrac{1}{2} F(\varrho \cos \nu - r \cos \varphi) = \tfrac{1}{2} F(\varrho \cos \nu - d) \ . \ . \ . \ (21_b)$$

disparaîtra; si O est situé sur une perpendiculaire dont la distance au point mobile est plus grande que celle de la ligne zéro, P'' est *négatif*, pour les distances plus petites il est *positif.* Pour le point mobile (ou plutôt pour la perpendiculaire abaissée de ce point sur la direction de la force) le second viriel disparaît, et on a alors:

$$\tfrac{1}{4} P'' = \tfrac{1}{2} F \varrho \cos \nu = \tfrac{1}{2} m v^2$$

ou

$$P'' = 4 \, T.$$

11. Réciproquement, nous pouvons chercher une expression pour la différence des viriels, et nous trouvons alors directement l'équation complète du viriel. Prenons en effet, pour simplifier, O sur la direction du rayon de courbure: on a alors $\nu = \varphi$,

$$R = F \cos \varphi = F \cos \nu ,$$

et pour la différence en question:

$$\tfrac{1}{2} (V_c - V_0) = \tfrac{1}{2} (F \varrho \cos \nu - F r \cos \varphi) = \tfrac{1}{2} R (\varrho - r)$$
$$= \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} R r , \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (22)$$

Or, pour le point O, origine des coordonnées polaires de la courbe décrite par le point mobile, on a

$$v^2 = \left(\frac{d r}{d t}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d \varphi}{dt}\right)^2 ,$$

et, comme on sait, pour la force R suivant le rayon vecteur r,

$$R = m r \left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2 - m \, \frac{d^2 r}{dt^2};$$

on obtient donc:

$$\frac{m}{2} v^2 - R r = \frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) - r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r \frac{d^2 r}{dt^2} \right\} =$$
$$= \frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r \frac{d^2 r}{dt^2} \right\} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left(r \, \frac{dr}{d t} \right) = \frac{m}{4} \frac{d^2 \, r^2}{dt^2} ,$$

ou

$$\frac{m}{2} v^2 = \frac{1}{4} \frac{d^2\, m\, r^2}{dt^2} + \frac{1}{2} R\, r, \quad \ldots \ldots \ldots (23)$$

ce qui est l'équation complète du viriel.

12. Ainsi que nous en avons fait la remarque au n°. 1, dans le cas du mouvement stationnaire d'un système, et cela s'applique aussi au mouvement stationnaire d'un point matériel unique, le terme $\frac{1}{4} \frac{d^2\, m\, r^2}{dt^2}$ disparaît, de sorte que l'équation (23) devient alors

$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{1}{2} \overline{Rr} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (24)$$

c'est-à-dire que la force vive moyenne de la particule est égale à son viriel moyen, quelle que soit l'origine des coordonnées par rapport à laquelle on compte r.

Ce dernier résultat s'explique d'après ce qui précède; puisque, en effet, la valeur moyenne de P'', la différence des viriels, est nulle, on voit que les *viriels moyens* par rapport au centre de courbure variable et par rapport à un point O arbitrairement choisi ont les mêmes valeurs; en d'autres termes, *la moyenne* des viriels relatifs au point O est indépendante du lieu de ce point, elle est donc la même pour tous les points du plan et toujours égale à la moyenne des viriels relatifs aux différents centres de courbure de la trajectoire que le point mobile parcourt.

Telle est donc la vraie signification de l'équation (24), et la même chose s'applique à un système de points en mouvement stationnaire; ainsi apparaît dans un jour caractéristique le fécond théorème de Clausius, „la force vive moyenne est égale au viriel moyen".

Pour finir, appliquons ce qui précède au cas simple d'une particule m unique, qui, sous l'action d'une force constante F dirigée vers le centre, se meut avec une vitesse constante sur une circonférence de cercle.

En vertu de la formule (16_a), on aura, a désignant le rayon du cercle pour un point O situé à une distance l du centre C,

$$P'' = 2\, m\, v^2 \frac{l}{a} \cos \alpha = 2\, F\, l \cos \alpha = 2\, F\, l \cos (n\, t),$$

où α est l'angle que $C\,O$ fait avec $C\,p$, et comme cet angle varie proportionnellement au temps, on peut poser $\alpha = n\,t$, n étant une constante.

L'équation (21_a) donne ensuite

$$\tfrac{1}{2}\, V_0 = \tfrac{1}{2}\, V_c - \tfrac{1}{4}\, P'' = \frac{m\, v^2}{2} - \tfrac{1}{2}\, F\, l \cos (n\, t),$$

d'où résulte, pour la valeur *moyenne*,

$$\tfrac{1}{2}\, \overline{V}_0 = \frac{m}{2}\, \overline{v^2} - \tfrac{1}{2}\, \frac{F\, l}{t} \int_0^t \cos (n\, t)\, d\, t$$

$$= \frac{m}{2}\, \overline{v^2} - \tfrac{1}{2}\, F l \left(\frac{\sin (n\, t)}{n\, t}\right);$$

pour de grandes valeurs de t, on a

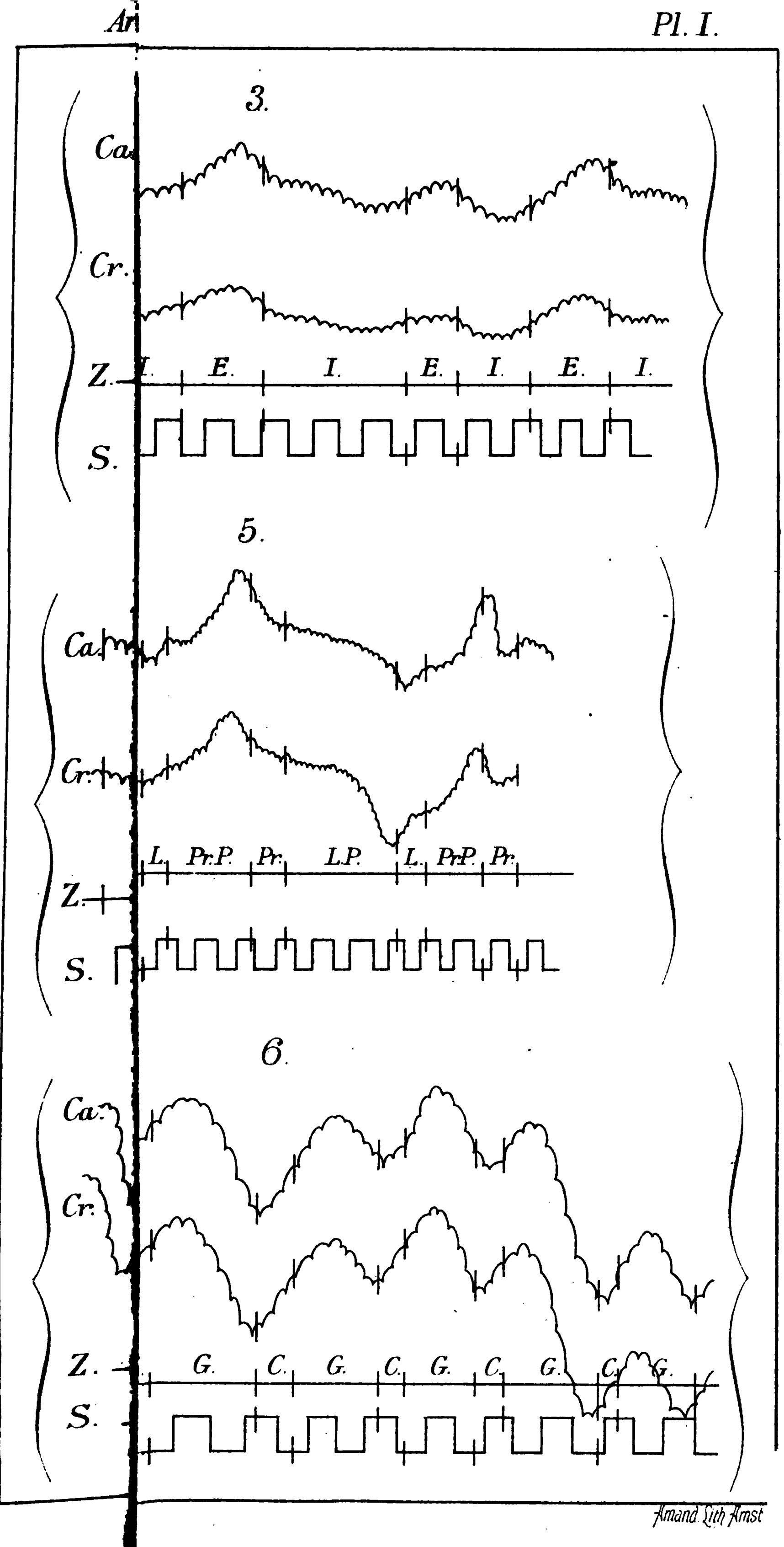
$$\lim. \left(\frac{\sin\, (n\, t)}{n\, t}\right) = 0,$$

par conséquent

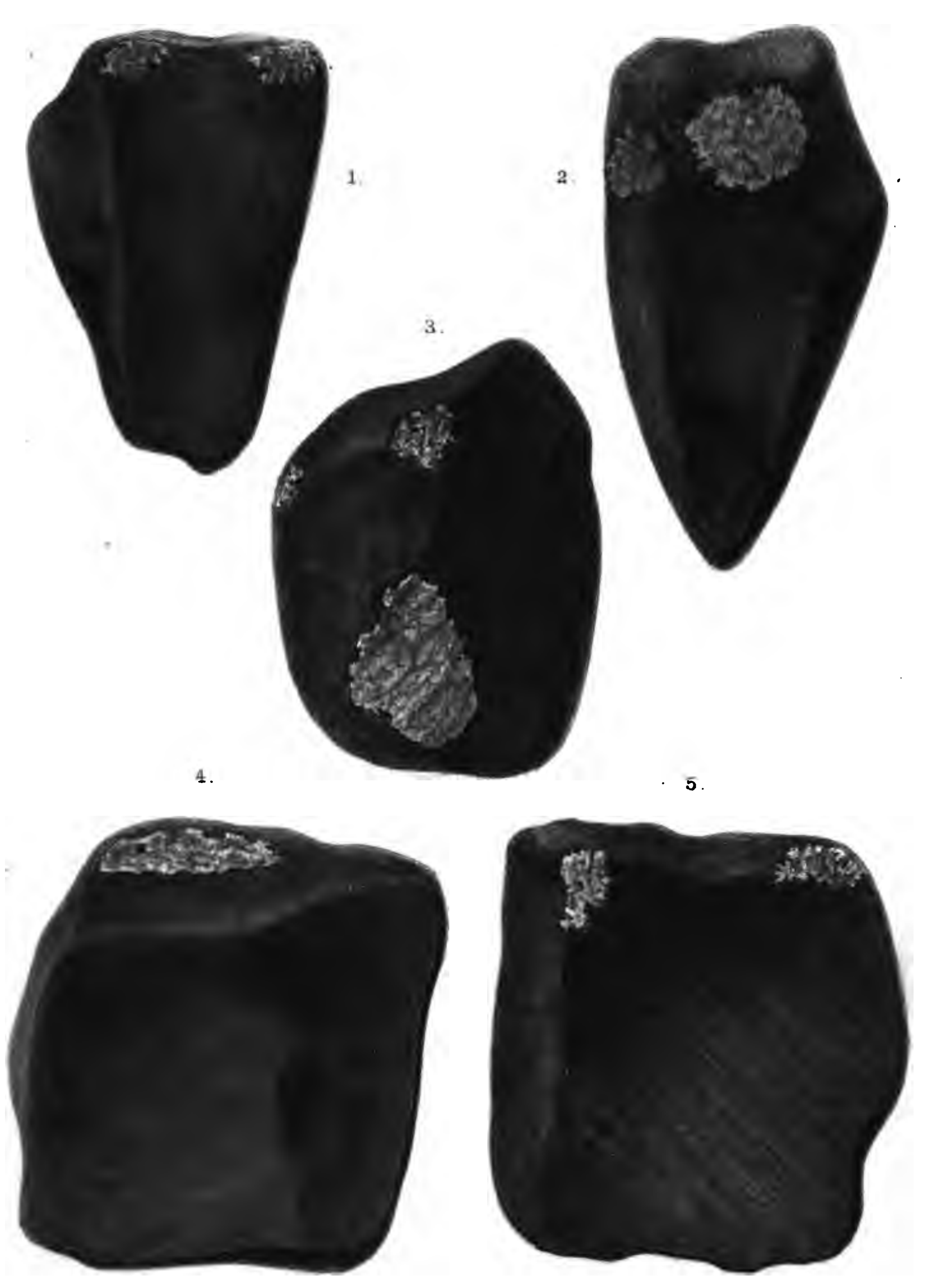
$$\tfrac{1}{2}\, \overline{V}_0 = \frac{m}{2}\, \overline{v^2},$$

ou, le viriel moyen de la particule pour un *point O quelconque* sera égal à sa force vive moyenne.

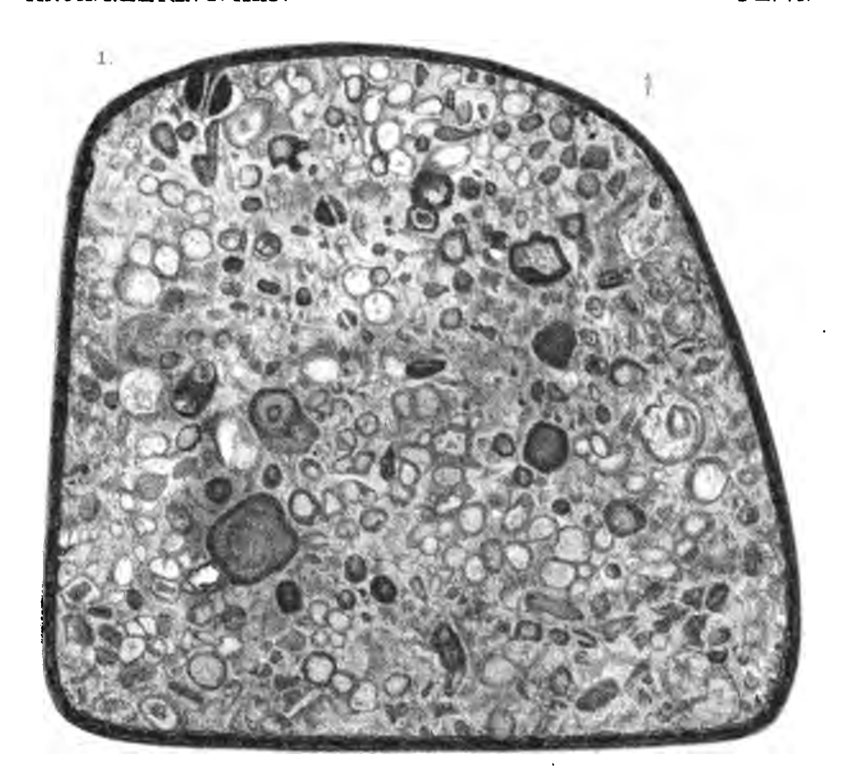
UTRECHT, Avril 1884.

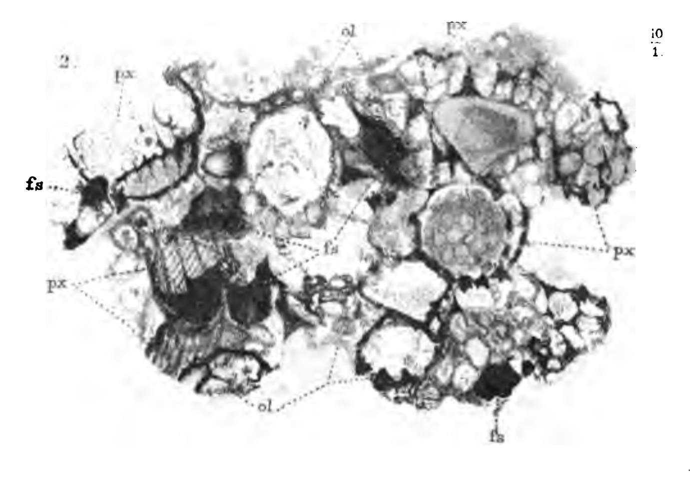


Amand Lith Amst



A. J. Wendel, ad nat. del. et lith.





A.J Wendel, ad nat. del et lith.

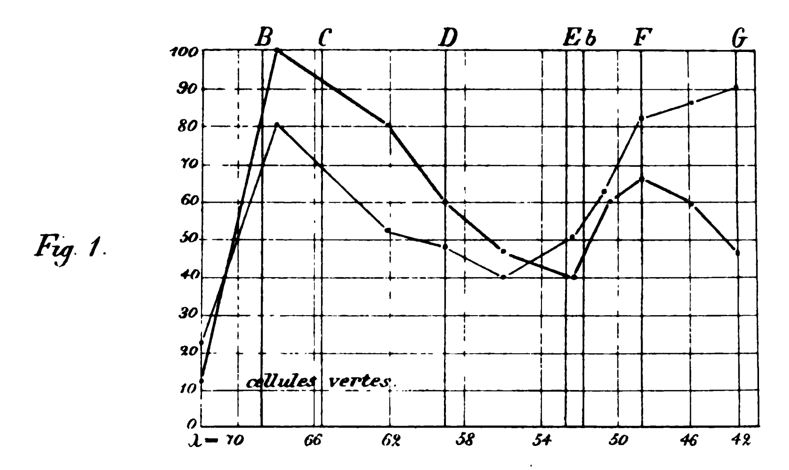
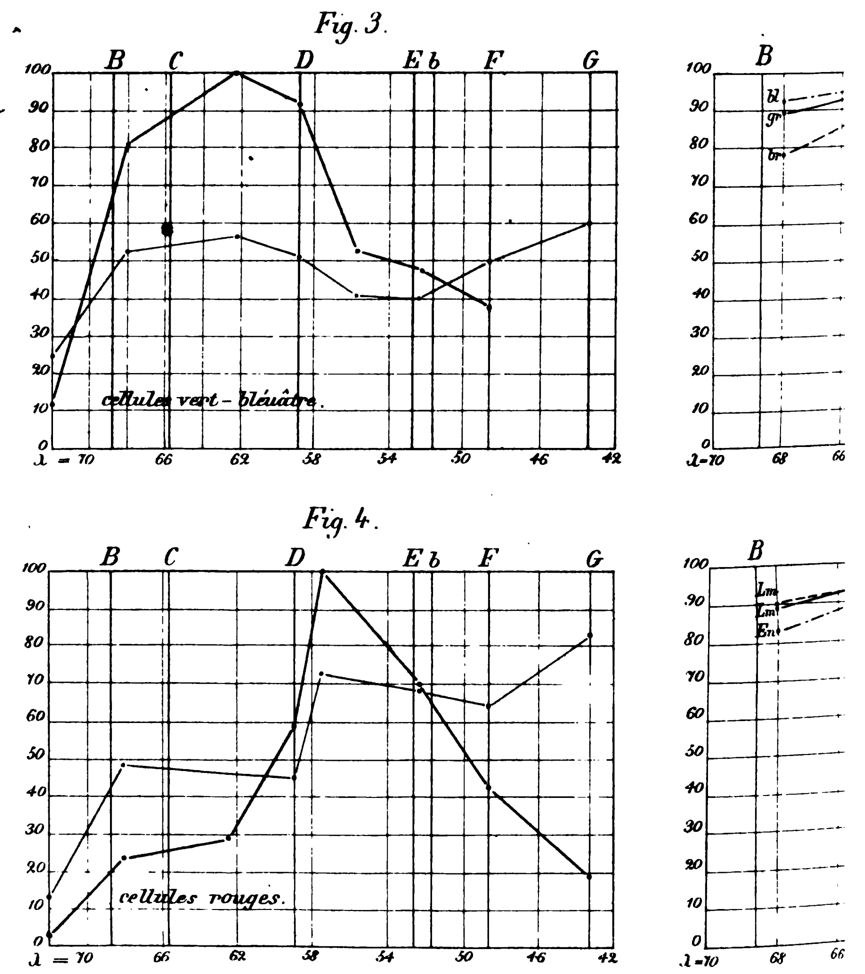


Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 4.



PL. VII.
PL. VIII.

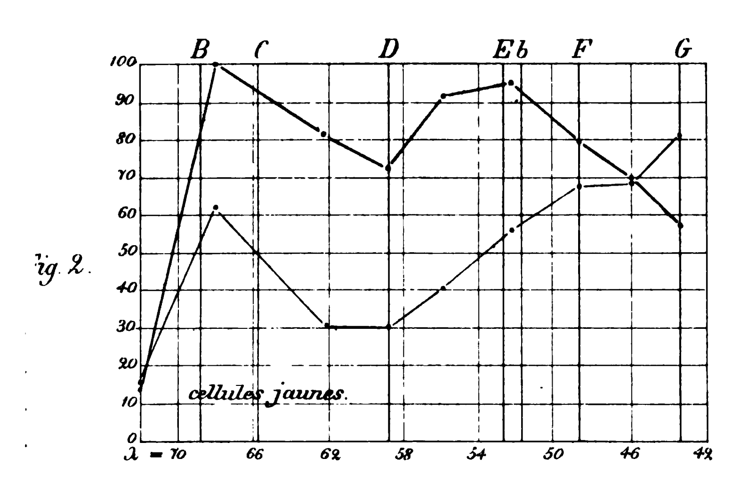


Fig. 2.

Fig. 5.

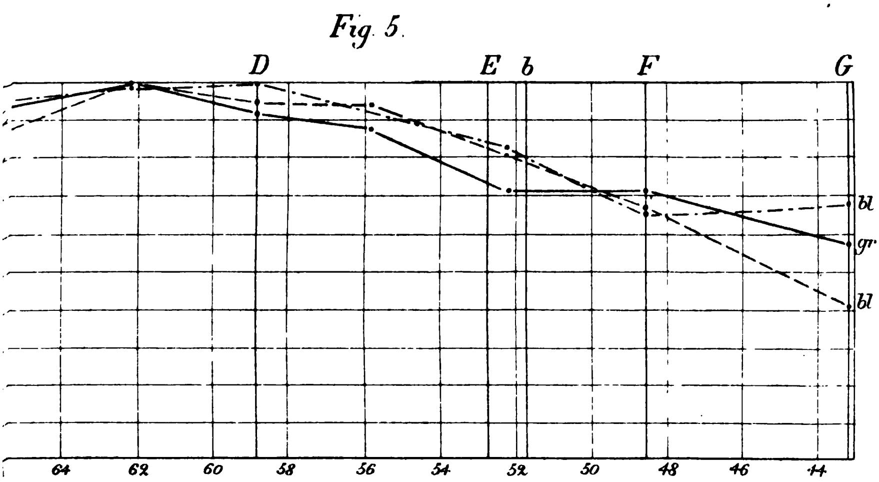
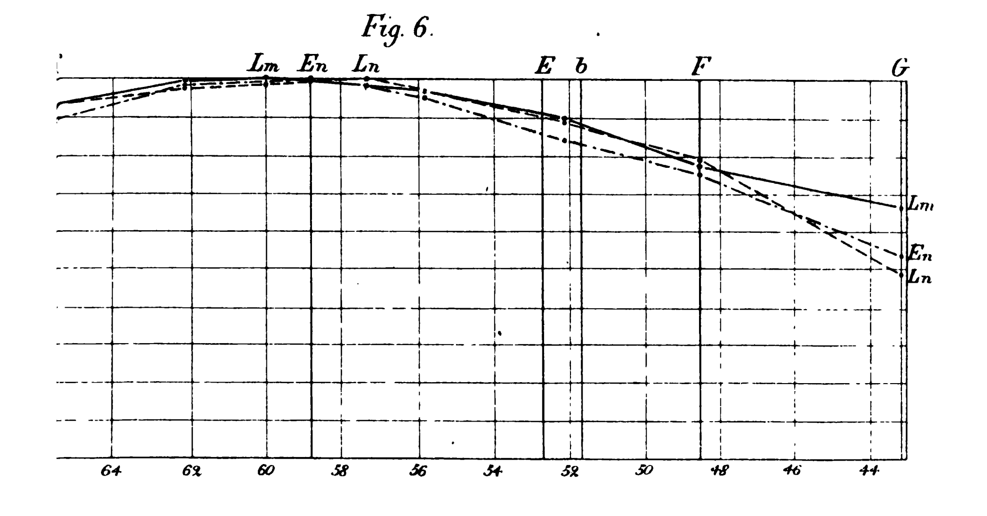
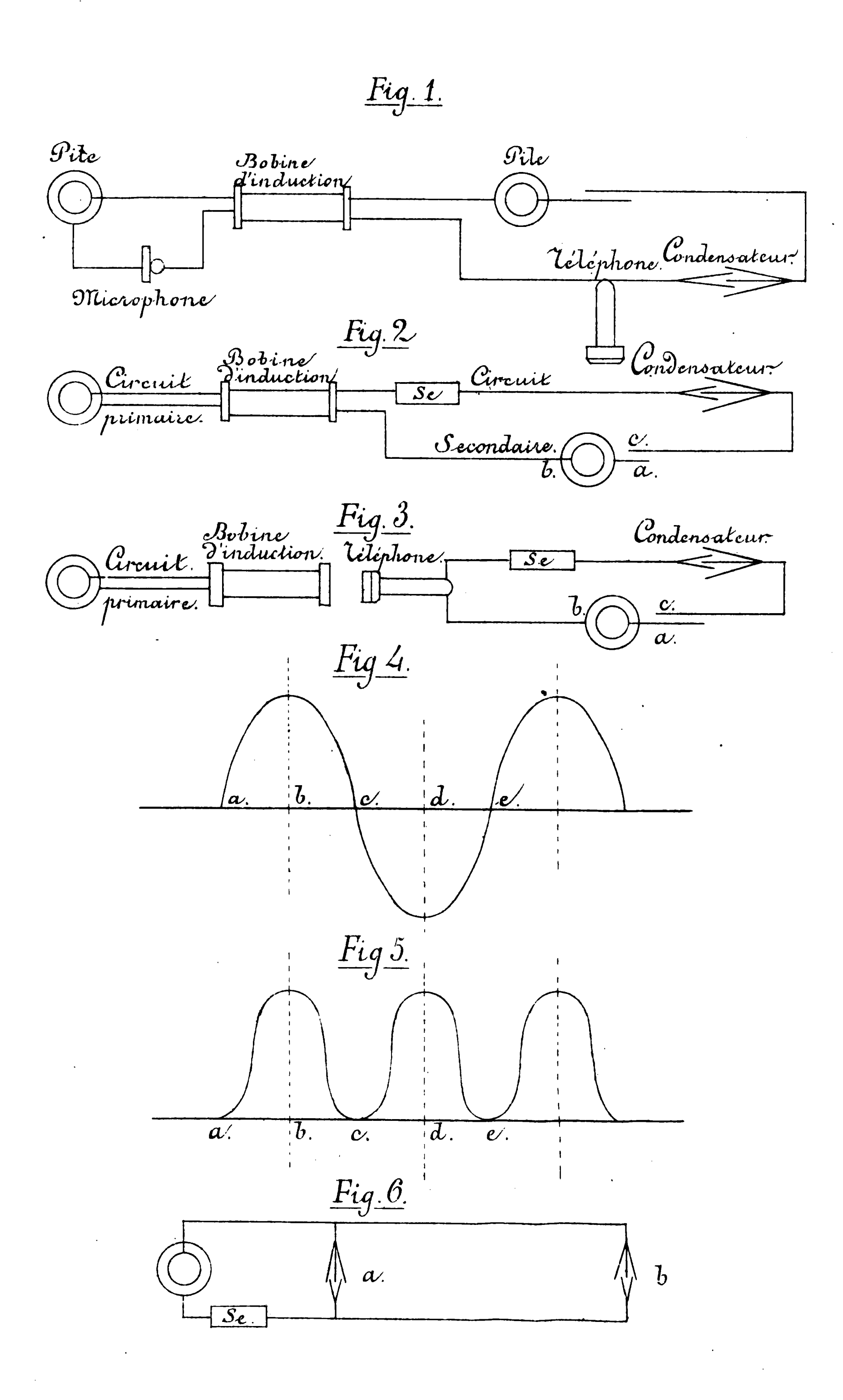
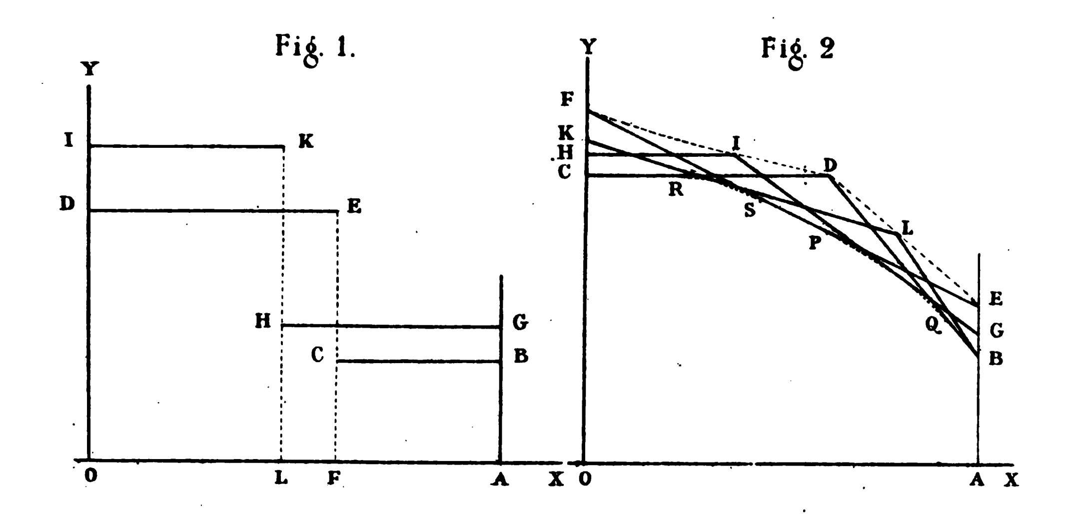
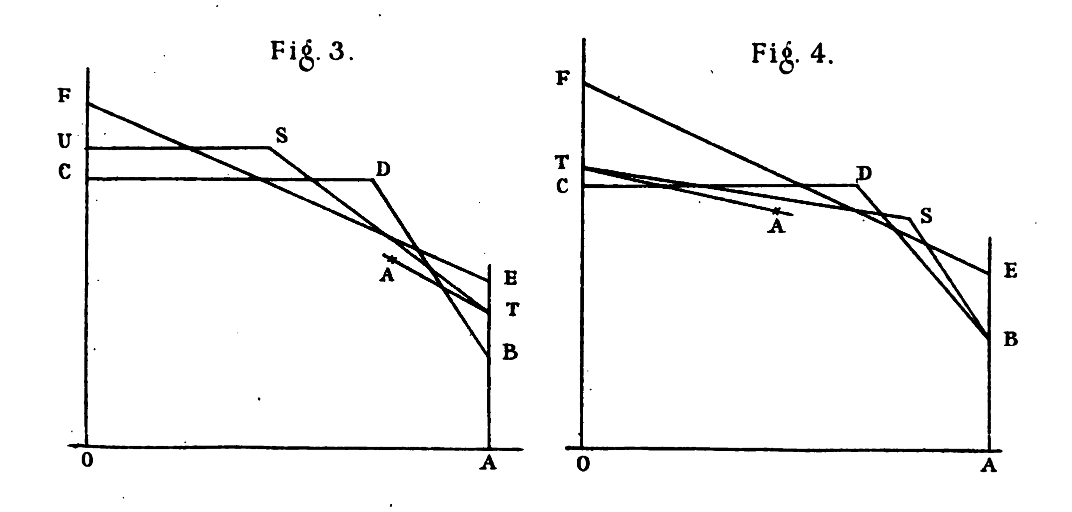


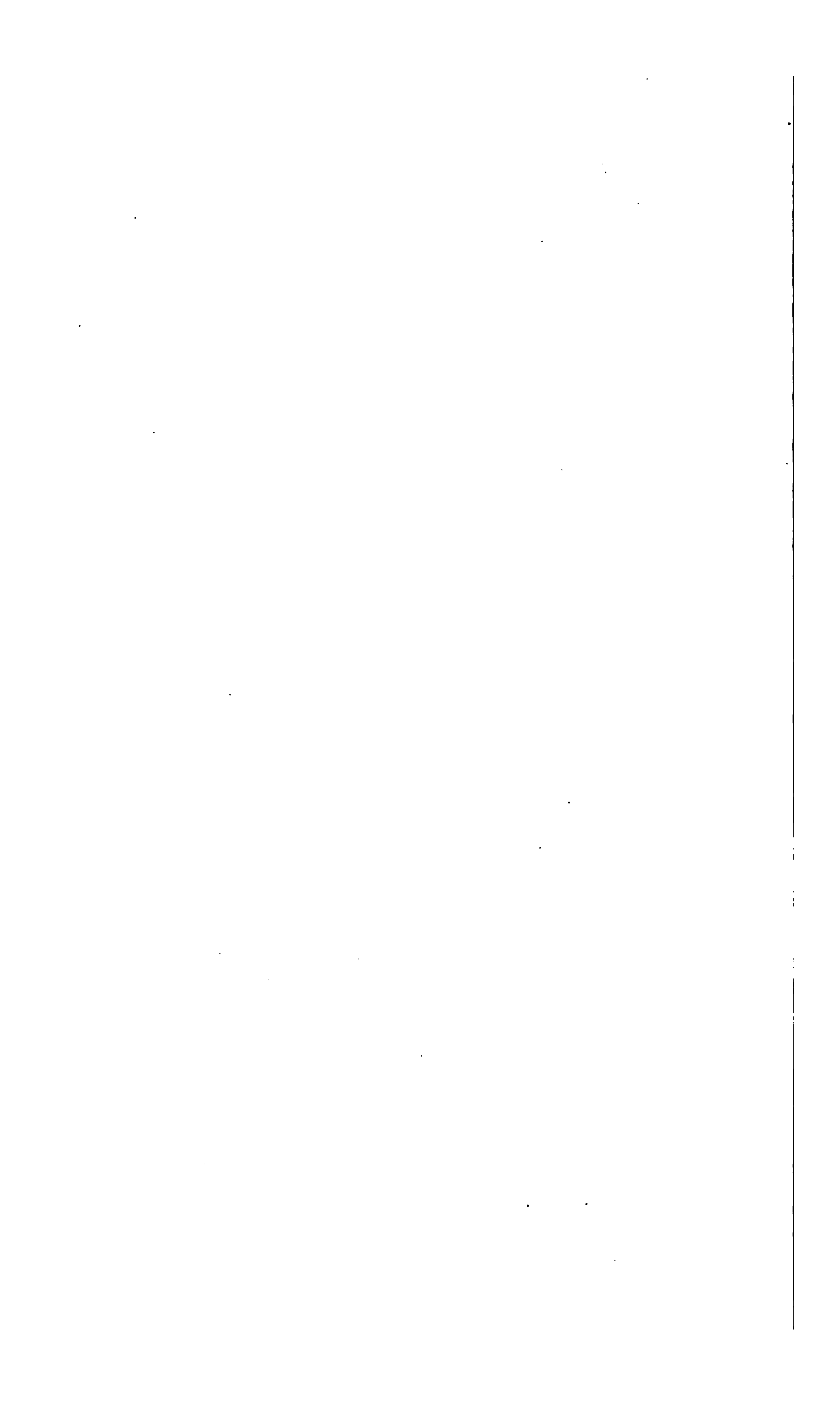
Fig. 6.




Fig. 1.
Pile
Bobine d'induction
Pile
Microphone
Téléphone.
Condensateur.
Fig. 2
Circuit primaire.
Bobine d'induction
Se
Circuit
Condensateur.
Secondaire.
b.
c.
a.
Fig. 3.
Circuit. primaire.
Bobine d'induction.
Téléphone.
Se
Condensateur.
b.
c.
a.
Fig 4.
a.
b.
c.
d.
e.
Fig 5.
a.
b.
c.
d.
e.
Fig. 6.
a.
b
Se.


Fig. 1.
Y
I
K
D
E
H
G
C
B
O
L
F
A
X
Y
Fig. 2
F
K
H
C
I
D
R
S
L
P
E
Q
G
B
O
A
X


Fig. 3.
F
U
S
C
D
A
E
T
B
O
A
Fig. 4.
F
T
C
D
A
S
E
B
O
A



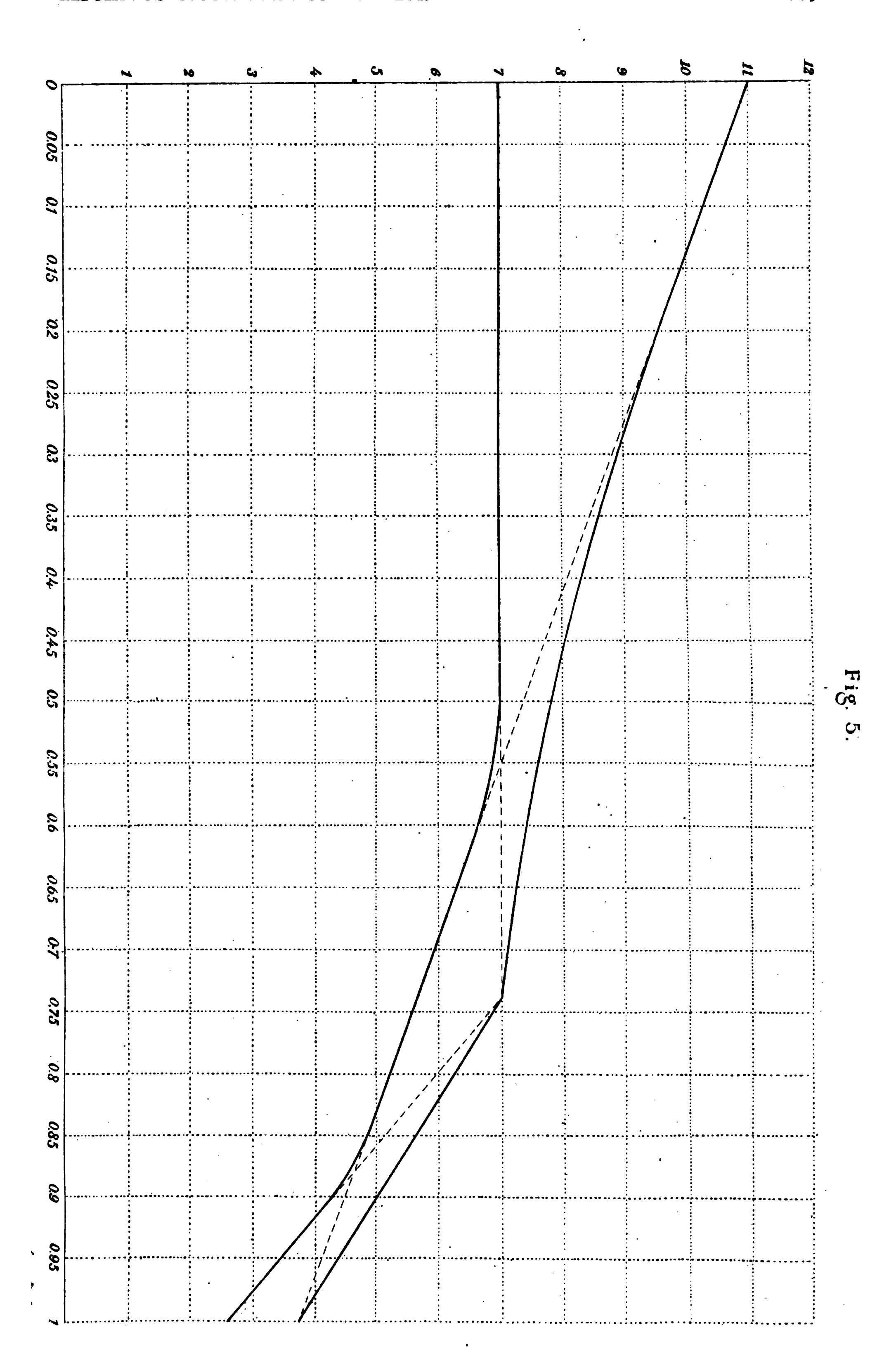

0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75
0.8
0.85
0.9
0.95
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Fig. 5.



